Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) et Mathématiques Financières

Mokhtar Zahdi ALAYA

10 juillet 2010

Plan

Plan

Plan

1. EDSRs standards
   - Existence et Unicité
   - EDSRs linéaires
   - Théorème de comparaison
2. EDSRs Unidimensionnelles
   - Cas d'un générateur à croissance linéaire
   - Cas d'un générateur à croissance quadratique
   - EDSRs réfléchies sur une barrière continue
3. EDSRs et Mathématiques Financières
   - Présentation de la finance mathématique
   - Terminologie financière
   - Évaluation des options via les EDSRs

Plan

1. EDSRs standards
   - Existence et Unicité
   - EDSRs linéaires
   - Théorème de comparaison
2. EDSRs Unidimensionnelles
   - Cas d'un générateur à croissance linéaire
   - Cas d'un générateur à croissance quadratique
   - EDSRs réfléchies sur une barrière continue
3. EDSRs et Mathématiques Financières
   - Présentation de la finance mathématique
   - Terminologie financière
   - Évaluation des options via les EDSRs

1. EDSRs standards

Notations

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: un espace de probabilité.
- $(W_t)_{t\leq T} := (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^d)^*_{0\leq t\leq T}$: un mouvement brownien d-dimensionnel ($d \geq 1$).
- $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$: la filtration complétée du brownien W.

Notations

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: un espace de probabilité.
- $(W_t)_{t \leqslant T} := (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^d)^*_{0 \leq t \leq T}$: un mouvement brownien d-dimensionnel $(d \geq 1)$.
- $(\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}$: la filtration complétée du brownien W.

Notations

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: un espace de probabilité.
- $(W_t)_{t\leqslant T} := (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^d)^*_{0\leq t\leq T}$: un mouvement brownien d-dimensionnel $(d \geq 1)$.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$: la filtration complétée du brownien W.

Notations (Suite)

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{P}_m$ ={processus sur $\Omega \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable}.
- $L^2_m(\mathcal{F}_t)$= $\{\eta$: variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-mesurable ; $\mathbb{E}[|\eta|^2] < \infty\}$.
- $\mathcal{S}^2_m(0,T)$=$\left\{\varphi \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|\varphi_t|^2] < \infty\right\}$.
- $\mathcal{H}^2_m(0,T)$=$\left\{Z \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\right] < \infty\right\}$.

Notations (Suite)

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{P}_m$ ={processus sur $\Omega \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable}.
- $L^2_m(\mathcal{F}_t)$= $\{\eta$: variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-mesurable ; $\mathbb{E}[|\eta|^2] < \infty\}$.
- $\mathcal{S}^2_m(0,T)$=$\left\{\varphi \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2] < \infty\right\}$.
- $\mathcal{H}^2_m(0,T)$=$\left\{Z \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\right] < \infty\right\}$.

Notations (Suite)

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{P}_m$ $=\{$processus sur $\Omega \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable$\}$.
- $L^2_m(\mathcal{F}_t)=$ $\{\eta$: variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-mesurable ; $\mathbb{E}[|\eta|^2] < \infty\}$.
- $\mathcal{S}^2_m(0,T)=\left\{\varphi \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2] < \infty\right\}$.
- $\mathcal{H}^2_m(0,T)=\left\{Z \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\right] < \infty\right\}$.

Notations (Suite)

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{P}_m$ $=\{$processus sur $\Omega \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable$\}$.
- $L^2_m(\mathcal{F}_t)=$ $\{\eta$: variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-mesurable ; $\mathbb{E}[|\eta|^2] < \infty\}$.
- $\mathcal{S}^2_m(0,T)=\Big\{\varphi \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} |\varphi_t|^2] < \infty\Big\}$.
- $\mathcal{H}^2_m(0,T)=\Big\{Z \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}\Big[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\Big] < \infty\Big\}$.

Notations (Suite)

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{P}_m$ $=$\{processus sur $\Omega \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable\}.
- $L^2_m(\mathcal{F}_t)=$ $\{\eta$: variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-mesurable ; $\mathbb{E}[|\eta|^2] < \infty\}$.
- $\mathcal{S}^2_m(0,T)=\Big\{\varphi \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2] < \infty\Big\}$.
- $\mathcal{H}^2_m(0,T)=\Big\{Z \in \mathcal{P}_m;\ \mathbb{E}\Big[\int_0^T |Z_s|^2\, ds\Big] < \infty\Big\}$.

Forme générale des EDSRs

Une EDSR a les forme suivantes :

Forme différentielle

$$\begin{cases} -dY_t &= g(t, Y_t, Z_t)\,dt - Z_t\,dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T &= \xi. \end{cases}$$

Forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \; 0 \leq t \leq T.$$

- g : générateur,
- ξ : condition terminale,
- l'EDSR associée aux paramètres (g, ξ).

Forme générale des EDSRs

Une EDSR a les forme suivantes :

Forme différentielle

$$\begin{cases} -dY_t & = g(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t\, dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

Forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \ 0 \leq t \leq T.$$

- g : générateur,
- ξ : condition terminale,
- l'EDSR associée aux paramètres (g, ξ).

Forme générale des EDSRs

Une EDSR a les forme suivantes :

Forme différentielle

$$\begin{cases} -dY_t & = g(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t\, dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

Forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \;\; 0 \leq t \leq T.$$

- g : générateur,
- ξ : condition terminale,
- l'EDSR associée aux paramètres (g, ξ).

Forme générale des EDSRs

Une EDSR a les forme suivantes :

Forme différentielle

$$\begin{cases} -dY_t &= g(t, Y_t, Z_t)\,dt - Z_t\,dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T &= \xi. \end{cases}$$

Forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

- g : générateur,
- ξ : condition terminale,
- l'EDSR associée aux paramètres (g, ξ).

Forme générale des EDSRs

Une EDSR a les forme suivantes :

Forme différentielle

$$\begin{cases} -dY_t & = g(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t\, dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

Forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \; 0 \leq t \leq T.$$

- g : générateur,
- ξ : condition terminale,
- l'EDSR associée aux paramètres (g, ξ).

Définition d'une solution de l'EDSR (g, ξ)

Définition

- $\xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T)$, une condition terminale.
- $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un générateur supposé $\mathcal{P}_m \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m\times d})$.

Une solution *m−dimensionnelle* de l'EDSR (g, ξ) est la donnée d'un couple de processus $(Y, Z) := (Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ tels que $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\begin{cases} Y \in \mathcal{S}^2_m(0,T) \qquad Z \in \mathcal{H}^2_{m\times d}(0,T) \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s,\omega,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Définition d'une solution de l'EDSR (g, ξ)

Définition

- $\xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T)$, une condition terminale.
- $g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un générateur supposé $\mathcal{P}_m \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m\times d})$.

Une solution *m−dimensionnelle* de l'EDSR (g, ξ) est la donnée d'un couple de processus $(Y, Z) := (Y_t, Z_t)_{0\le t\le T}$ tels que $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\begin{cases} Y \in \mathcal{S}^2_m(0, T) \qquad Z \in \mathcal{H}^2_{m\times d}(0, T) \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s, \omega, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Définition d'une solution de l'EDSR (g, ξ)

Définition

- $\xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T)$, une condition terminale.
- $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un générateur supposé $\mathcal{P}_m \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m\times d})$.

Une solution $m-$*dimensionnelle* de l'EDSR (g, ξ) est la donnée d'un couple de processus $(Y, Z) := (Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$tels que $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\begin{cases} Y \in \mathcal{S}^2_m(0,T) \qquad Z \in \mathcal{H}^2_{m\times d}(0,T) \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s, \omega, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Existence, Unicité

Théorème *(**Pardoux, Peng 1990**)*

*Sous les hypothèses **(H1)** dites souvent standards :*

$$
\textbf{\textit{(H1)}}\begin{cases} -\ \xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T) \\ -(g(t,0,0))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}^2_m(0,T). \\ -\text{ il existe } C \geq 0, \forall t \in [0,T],\ y, y' \in \mathbb{R}^m,\ z, z' \in \mathbb{R}^{m\times d}, \\ \qquad |g(t,\omega,y,z) - g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'| + \|z-z'\|), \\ \qquad\qquad dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases}
$$

l'EDSR (g,ξ) admet une unique solution (Y,Z).

Existence, Unicité

Théorème *(**Pardoux, Peng 1990**)*

*Sous les hypothèses **(H1)** dites souvent standards :*

$$
\textbf{(H1)}\begin{cases}
-\ \xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T) \\
-(g(t,0,0))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}^2_m(0,T). \\
-\text{ il existe } C \geq 0, \forall t \in [0,T],\ y, y' \in \mathbb{R}^m,\ z, z' \in \mathbb{R}^{m\times d}, \\
\qquad |g(t,\omega,y,z) - g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'| + \|z-z'\|), \\
\qquad\qquad dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.
\end{cases}
$$

l'EDSR (g,ξ) admet une unique solution (Y,Z).

Existence, Unicité

Théorème(*Pardoux, Peng 1990*)

*Sous les hypothèses **(H1)** dites souvent standards :*

$$\textbf{(H1)}\begin{cases} -\ \xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T) \\ -(g(t,0,0))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}^2_m(0,T). \\ -\text{ il existe } C \geq 0, \forall t \in [0,T],\ \ y,y' \in \mathbb{R}^m,\ \ z,z' \in \mathbb{R}^{m\times d}, \\ \qquad |g(t,\omega,y,z) - g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'| + \|z-z'\|), \\ \qquad\qquad dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases}$$

l'EDSR (g,ξ) admet une unique solution (Y,Z).

Existence, Unicité

Théorème *(Pardoux, Peng 1990)*

*Sous les hypothèses **(H1)** dites souvent standards :*

$$\textit{\textbf{(H1)}}\begin{cases} -\ \xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T) \\ -(g(t,0,0))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}^2_m(0,T). \\ -\text{ il existe } C\geq 0, \forall t\in[0,T],\ \ y,y'\in\mathbb{R}^m,\ \ z,z'\in\mathbb{R}^{m\times d}, \\ \qquad |g(t,\omega,y,z)-g(t,\omega,y',z')|\leq C(|y-y'|+\|z-z'\|), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad dt\otimes d\mathbb{P}-p.s. \end{cases}$$

l'EDSR (g,ξ) admet une unique solution (Y,Z).

Existence, Unicité

Théorème *(**Pardoux, Peng 1990**)*

*Sous les hypothèses **(H1)** dites souvent standards :*

$$\textbf{\textit{(H1)}}\begin{cases} -\ \xi \in L^2_m(\mathcal{F}_T) \\ -(g(t,0,0))_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}^2_m(0,T). \\ -\ \text{il existe } C \ge 0, \forall t \in [0,T],\ \ y, y' \in \mathbb{R}^m,\ \ z, z' \in \mathbb{R}^{m\times d}, \\ \qquad |g(t,\omega,y,z) - g(t,\omega,y',z')| \le C(|y-y'| + \|z-z'\|), \\ \qquad\qquad dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases}$$

l'EDSR (g,ξ) admet une unique solution (Y,Z).

EDSRs linéaires

Préposition

soient

- (β, μ) : *un processus à valeur dans* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, *progressivement mesurable et borné,*
- φ : $\mathcal{H}_1^2(0, T)$,
- ξ : *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\varphi_s + Y_s\beta_s + Z_s\mu_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

a) *L'équation possède une unique solution* $(Y, Z) \in \mathcal{S}_1^2(0, T) \times \mathcal{H}_d^2(0, T)$, *dont* Y *est donnée par la formule explicite*

EDSRs linéaires

Préposition

soient

- (β, μ) : *un processus à valeur dans* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, *progressivement mesurable et borné,*
- φ : $\mathcal{H}_1^2(0, T)$,
- ξ : *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\varphi_s + Y_s\beta_s + Z_s\mu_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

a) *L'équation possède une unique solution* $(Y, Z) \in \mathcal{S}_1^2(0, T) \times \mathcal{H}_d^2(0, T)$, *dont* Y *est donnée par la formule explicite*

EDSRs linéaires

Préposition

soient

- (β, μ) : *un processus à valeur dans* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, *progressivement mesurable et borné,*
- φ : $\mathcal{H}_1^2(0, T)$,
- ξ : *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\varphi_s + Y_s\beta_s + Z_s\mu_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

a) *L'équation possède une unique solution* $(Y, Z) \in \mathcal{S}_1^2(0, T) \times \mathcal{H}_d^2(0, T)$, *dont* Y *est donnée par la formule explicite*

EDSRs linéaires

Préposition

soient

- (β, μ) *: un processus à valeur dans* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$*, progressivement mesurable et borné,*
- $\varphi : \mathcal{H}_1^2(0, T)$,
- ξ *: une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\varphi_s + Y_s\beta_s + Z_s\mu_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

a) *L'équation possède une unique solution* $(Y, Z) \in \mathcal{S}_1^2(0, T) \times \mathcal{H}_d^2(0, T)$*, dont* Y *est donnée par la formule explicite*

Préposition (Suite)

$$Y_t = \mathbb{E}\Big[\xi\Gamma_{t,T} + \int_t^T \Gamma_{t,s}\varphi_s\, ds|\mathcal{F}_t\Big]$$

où $(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$ est le processus adjoint définit par l'EDS

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s}(\beta_s\, ds + \mu_s^*\, dW_s)\,; \qquad \Gamma_{t,t} = 1.$$

$$\forall t \leq s \leq u \qquad \Gamma_{t,s}\Gamma_{s,u} = \Gamma_{t,u} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

b) *Si ξ ainsi que φ sont positifs , alors le processus $(Y_t)_{t\leq T}$ l'est aussi. En outre, si de plus $Y_t = 0$ sur $B \in \mathcal{F}_t$, alors pour tout $s \geq t$ on a $\mathbb{P}$-p.s. sur B, Y_s=0 $\xi = 0$ et $\varphi_s = 0$, $Z_s = 0\ dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$*

Préposition (Suite)

$$Y_t = \mathbb{E}\Big[\xi\Gamma_{t,T} + \int_t^T \Gamma_{t,s}\varphi_s\, ds|\mathcal{F}_t\Big]$$

où $(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$ est le processus adjoint définit par l'EDS

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s}(\beta_s\, ds + \mu_s^*\, dW_s)\,; \qquad \Gamma_{t,t} = 1.$$

$$\forall t \leq s \leq u \qquad \Gamma_{t,s}\Gamma_{s,u} = \Gamma_{t,u} \quad \mathbb{P}-p.s.$$

b) *Si ξ ainsi que φ sont positifs , alors le processus $(Y_t)_{t\leq T}$ l'est aussi. En outre, si de plus $Y_t = 0$ sur $B \in \mathcal{F}_t$, alors pour tout $s \geq t$ on a $\mathbb{P}$-p.s. sur B, Y_s=0 $\xi = 0$ et $\varphi_s = 0$, $Z_s = 0\ dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$*

Préposition (Suite)

$$Y_t = \mathbb{E}\Big[\xi\Gamma_{t,T} + \int_t^T \Gamma_{t,s}\varphi_s \, ds|\mathcal{F}_t\Big]$$

où $(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$ est le processus adjoint définit par l'EDS

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s}(\beta_s \, ds + \mu_s^* \, dW_s)\,; \qquad \Gamma_{t,t} = 1.$$

$$\forall t \leq s \leq u \qquad \Gamma_{t,s}\Gamma_{s,u} = \Gamma_{t,u} \quad \mathbb{P}-p.s.$$

b) *Si ξ ainsi que φ sont positifs , alors le processus $(Y_t)_{t\leq T}$ l'est aussi. En outre, si de plus $Y_t = 0$ sur $B \in \mathcal{F}_t$, alors pour tout $s \geq t$ on a $\mathbb{P}$-p.s. sur B, Y_s=0 $\xi = 0$ et $\varphi_s = 0$, $Z_s = 0 \; dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$*

Théorème de comparaison

Théorème*(El Karoui, Peng, Quenez 1997)*

Soient (Y, Z) et (Y', Z') solutions des EDSR associées aux paramètres (g, ξ) et (g', ξ').
*On suppose que g et g' vérifient **(H1)***
Si $\xi \leq \xi'$ $\mathbb{P} - p.s$ et $g(t, Y'_t, Z'_t) \leq g'(t, Y'_t, Z'_t)$ $dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$, alors

$$Y_t \leq Y'_t, \quad 0 \leq t \leq T \ , \ p.s.$$

Théorème de comparaison

Théorème*(El Karoui, Peng, Quenez 1997)*

Soient (Y, Z) *et* (Y', Z') *solutions des EDSR associées aux paramètres* (g, ξ) *et* (g', ξ').
On suppose que g *et* g' *vérifient* ***(H1)***
Si $\xi \leq \xi'$ $\mathbb{P} - p.s$ *et* $g(t, Y'_t, Z'_t) \leq g'(t, Y'_t, Z'_t)$ $dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$, *alors*

$$Y_t \leq Y'_t, \quad 0 \leq t \leq T \ , \ p.s.$$

2. EDSRs Unidimensionnelles

- $g : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{1+d})$ *mesurable*.
- $\xi \in L_1^2(\mathcal{F}_T)$; condition terminale.

Cas d'un générateur à croissance linéaire

$$
(\boldsymbol{H2}) \left\{ \begin{array}{l}
-\ (g(t,0,0))_{t\leq T} \in \mathcal{H}_1^2(0,T), \\
-\textit{Pour } t,\omega \textit{ fixés, } g(t,\omega,.,.) \textit{ est continue } dt\otimes d\mathbb{P}-p.s. \\
-\ \textbf{\textit{Croissance linéaire}} : \textit{Il existe une fonction} \\
\quad b_k(y,z) := k(|y|+|z|) \\
\quad \forall\, t,\omega,y,z \ \ |g(t,\omega,y,z)| \leq |g(t,\omega,0,0)| + b_k(y,z), \\
\quad dt\otimes d\mathbb{P}-p.s.
\end{array} \right.
$$

Théorème (*Lepeltier, San Martin 1997*)

Sous l'hypothèse $(\boldsymbol{H2})$ *l'EDSR associée aux paramètres* (g,ξ) *admet une solution maximale* (Y,Z) *dans le sens où si* (Y',Z') *est une autre solution de cette équation, alors* $Y \geq Y'$ $\mathbb{P}-p.s.$

Cas d'un générateur à croissance linéaire

$$
\boldsymbol{(H2)}\begin{cases}
-\ (g(t,0,0))_{t\leq T} \in \mathcal{H}^2_1(0,T), \\
-\textit{Pour } t,\omega \textit{ fixés, } g(t,\omega,.,.) \textit{ est continue } dt\otimes d\mathbb{P}-p.s. \\
-\ \textbf{\textit{Croissance linéaire}} : \textit{Il existe une fonction} \\
\quad b_k(y,z) := k(|y|+|z|) \\
\quad \forall\, t,\omega,y,z \ \ |g(t,\omega,y,z)| \leq |g(t,\omega,0,0)| + b_k(y,z), \\
\quad dt\otimes d\mathbb{P}-p.s.
\end{cases}
$$

Théorème (***Lepelitier, San Martin 1997***)

Sous l'hypothèse $\boldsymbol{(H2)}$ *l'EDSR associée aux paramètres* (g,ξ) *admet une solution maximale* (Y,Z) *dans le sens où si* (Y',Z') *est une autre solution de cette équation, alors* $Y \geq Y'$ $\mathbb{P}-p.s.$

Cas d'un générateur à croissance linéaire

$$
(\boldsymbol{H2}) \begin{cases} -\ (g(t,0,0))_{t\leq T} \in \mathcal{H}_1^2(0,T), \\ -\mathit{Pour}\ t,\omega\ \mathit{fix\acute{e}s},\ g(t,\omega,.,.)\ \mathit{est\ continue}\ dt\otimes d\mathbb{P}-p.s. \\ -\ \boldsymbol{Croissance\ lin\acute{e}aire}\ :\ \mathit{Il\ existe\ une\ fonction} \\ \qquad b_k(y,z) := k(|y|+|z|) \\ \qquad \forall\, t,\omega,y,z\ \ |g(t,\omega,y,z)| \leq |g(t,\omega,0,0)| + b_k(y,z), \\ \qquad dt\otimes d\mathbb{P}-p.s. \end{cases}
$$

Théorème (*Lepelitier, San Martin 1997*)

Sous l'hypothèse (***H2***) *l'EDSR associée aux paramètres* (g,ξ) *admet une solution maximale* (Y,Z) *dans le sens où si* (Y',Z') *est une autre solution de cette équation, alors* $Y \geq Y'$ $\mathbb{P}-p.s.$

Cas d'un générateur à croissance linéaire

$$
\textbf{\textit{(H2)}} \begin{cases} -\ (g(t,0,0))_{t\leq T} \in \mathcal{H}_1^2(0,T), \\ -\textit{Pour } t,\omega \textit{ fixés, } g(t,\omega,.,.) \textit{ est continue } dt\otimes d\mathbb{P} - p.s. \\ -\ \textbf{\textit{Croissance linéaire}} \textit{ : Il existe une fonction} \\ \qquad b_k(y,z) := k(|y|+|z|) \\ \qquad \forall\, t,\omega,y,z \;\; |g(t,\omega,y,z)| \leq |g(t,\omega,0,0)| + b_k(y,z), \\ \qquad dt\otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases}
$$

Théorème (*Lepelitier, San Martin 1997*)

*Sous l'hypothèse (**H2**) l'EDSR associée aux paramètres (g,ξ) admet une solution maximale (Y,Z) dans le sens où si (Y',Z') est une autre solution de cette équation, alors $Y \geq Y'$ $\mathbb{P}-p.s.$*

Cas d'un générateur à croissance quadratique

(H3)

(i) ***Croissance quadratique en z :***
il existe une constance $C > 0$ *telleque*
$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}, \ |g(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2) \ \mathbb{P} - p.s.,$
(ii) ***Continuité en (y,z)*** *:* $\forall t \in [0, T]$, *la fonction qui a* $(y, z) \longrightarrow g(t, y, z)$ *est continue,* $\mathbb{P} - p.s.$
(iii) ***Bornitude*** *:* $\xi \in \mathbb{R}$ *est bornée.*

Théorème (***Lepeltier ,San Martin 1998 et Kobylanski 2000***)

Sous les hypothèses ***(H3)***, *l'EDSR à générateur quadratique en* Z *associée à* (g, ξ) *admet une solution maximale. De plus* Y *est un processus* $\mathcal{P}_1$ *mesurable, continue et bornée.*

Cas d'un générateur à croissance quadratique

(H3)

- ***(i) Croissance quadratique en z :*** *il existe une constance* $C > 0$ *telleque* $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}$, $|g(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2)\ \mathbb{P} - p.s.$,
- ***(ii) Continuité en (y,z) :*** $\forall t \in [0, T]$, *la fonction qui a* $(y, z) \longrightarrow g(t, y, z)$ *est continue*, $\mathbb{P} - p.s.$
- ***(iii) Bornitude :*** $\xi \in \mathbb{R}$ *est bornée.*

Théorème (*Lepeltier ,San Martin 1998 et Kobylanski 2000*)

*Sous les hypothèses **(H3)**, l'EDSR à générateur quadratique en Z associée à* (g, ξ) *admet une solution maximale. De plus* Y *est un processus* $\mathcal{P}_1$ *mesurable, continue et bornée.*

Cas d'un générateur à croissance quadratique

(H3)

(i) Croissance quadratique en z :
il existe une constance $C > 0$ *telleque*
$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}, \ |g(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2) \ \mathbb{P} - p.s.,$

(ii) Continuité en (y,z) : $\forall t \in [0, T]$, *la fonction qui a*
$(y, z) \longrightarrow g(t, y, z)$ *est continue*, $\mathbb{P} - p.s.$

(iii) Bornitude : $\xi \in \mathbb{R}$ *est bornée.*

Théorème (*Lepeltier ,San Martin 1998 et Kobylanski 2000*)

*Sous les hypothèses **(H3)**, l'EDSR à générateur quadratique en* Z *associée à* (g, ξ) *admet une solution maximale. De plus* Y *est un processus* $\mathcal{P}_1$ *mesurable, continue et bornée.*

Cas d'un générateur à croissance quadratique

(H3)

- ***(i) Croissance quadratique en z :***
  il existe une constance $C > 0$ *telleque*
  $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}, \ |g(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2) \ \mathbb{P} - p.s.,$
- ***(ii) Continuité en (y,z) :*** $\forall t \in [0, T]$, *la fonction qui a*
  $(y, z) \longrightarrow g(t, y, z)$ *est continue,* $\mathbb{P} - p.s.$
- ***(iii) Bornitude :*** $\xi \in \mathbb{R}$ *est bornée.*

Théorème (*Lepeltier ,San Martin 1998 et Kobylanski 2000*)

*Sous les hypothèses **(H3)**, l'EDSR à générateur quadratique en* Z *associée à* (g, ξ) *admet une solution maximale. De plus* Y *est un processus* $\mathcal{P}_1$ *mesurable, continue et bornée.*

Cas d'un générateur à croissance quadratique

(H3)
- ***(i) Croissance quadratique en z :*** *il existe une constance* $C > 0$ *telleque* $\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{d+1},\ |g(t,y,z)| \leq C(1+|z|^2)\ \mathbb{P}-p.s.,$
- ***(ii) Continuité en (y,z) :*** $\forall t \in [0,T]$, *la fonction qui a* $(y,z) \longrightarrow g(t,y,z)$ *est continue,* $\mathbb{P}-p.s.$
- ***(iii) Bornitude :*** $\xi \in \mathbb{R}$ *est bornée.*

Théorème (***Lepeltier ,San Martin 1998 et Kobylanski 2000***)

Sous les hypothèses ***(H3)***, *l'EDSR à générateur quadratique en* Z *associée à* (g,ξ) *admet une solution maximale. De plus* Y *est un processus* $\mathcal{P}_1$ *mesurable, continue et bornée.*

EDSRs réfléchies sur une barrière continue

EDSRs réfléchies

(i) $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ g(.,y,z) \in \mathcal{H}_1^2(0,T)$,

(ii) $\exists\ C > 0\ \forall y, y' \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{R}^d$;

$$|g(t,\omega,y,z)-g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'|+\|z-z'\|),\ dt\otimes d\mathbb{P}-p.s.$$

(iii) $S := (S_t)_{(0\leq t\leq T)}$ un processus réel continue $\mathcal{P}_1$-mesurable :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\Big[\sup\limits_{0\leq t\leq T}((S_t)^+)^2\Big] < +\infty, \\ S_T \leq \xi,\ \mathbb{P}-p.s. \end{cases}$$

EDSRs réfléchies sur une barrière continue

EDSRs réfléchies

(i) $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ g(.,y,z) \in \mathcal{H}_1^2(0,T)$,

(ii) $\exists\ C > 0\ \forall y, y' \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{R}^d$;

$$|g(t,\omega,y,z) - g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'| + \|z-z'\|),\ dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$$

(iii) $S := (S_t)_{(0 \leq t \leq T)}$ un processus réel continue $\mathcal{P}_1$-mesurable :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\Big[\sup\limits_{0 \leq t \leq T} ((S_t)^+)^2\Big] < +\infty, \\ S_T \leq \xi,\ \mathbb{P} - p.s. \end{cases}$$

EDSRs réfléchies sur une barrière continue

EDSRs réfléchies

(i) $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\; g(.,y,z) \in \mathcal{H}_1^2(0,T)$,

(ii) $\exists\ C > 0\ \forall y, y' \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{R}^d$;

$$|g(t,\omega,y,z)-g(t,\omega,y',z')| \leq C(|y-y'|+\|z-z'\|),\; dt\otimes d\mathbb{P}-p.s.$$

(iii) $S := (S_t)_{(0\leq t\leq T)}$ un processus réel continue $\mathcal{P}_1$-mesurable :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\Big[\sup\limits_{0\leq t\leq T} ((S_t)^+)^2\Big] < \; +\infty, \\ S_T \leq \xi,\; \mathbb{P}-p.s. \end{cases}$$

Définition d'une solution d'EDSR réfléchie

Une solution d'une EDSR réfléchie est la donnée d'un triplet du processus $(Y, Z, K) := (Y_t, Z_t, K_t)_{0\leq t\leq T}$ $\mathcal{P}_1$-mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^{1+d+1}$ telsque

$$\textbf{\textit{(H4)}}\begin{cases} Y \in \mathcal{S}_1^2(0,T),\ \ Z \in \mathcal{H}_{1\times d}^2(0,T) \ \ et \ \ K \in \mathcal{S}_1^2(0,T) \\ \ K \ \ est\ un\ processus\ continue\ croissant, (K_0 = 0) \\ Y_t = \xi + \displaystyle\int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dW_s,\ \ t \leq T. \\ \forall t \leq T, \quad Y_t \geq S_t \ et \displaystyle\int_0^T (Y_t - S_t)\ dK_t = 0. \end{cases}$$

l'EDSR réfléchie associée aux paramaètres (g, ξ, S).

Définition d'une solution d'EDSR réfléchie

Une solution d'une EDSR réfléchie est la donnée d'un triplet du processus $(Y, Z, K) := (Y_t, Z_t, K_t)_{0 \leq t \leq T}$ $\mathcal{P}_1$-mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^{1+d+1}$ telsque

$$\textbf{\textit{(H4)}} \begin{cases} Y \in \mathcal{S}_1^2(0,T), \;\; Z \in \mathcal{H}^2_{1\times d}(0,T) \;\; et \;\; K \in \mathcal{S}_1^2(0,T) \\ K \;\; est \;\; un \;\; processus \;\; continue \;\; croissant, (K_0 = 0) \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dW_s, \;\; t \leq T. \\ \forall t \leq T, \quad Y_t \geq S_t \;\; et \int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0. \end{cases}$$

l'EDSR réfléchie associée aux paramaètres (g, ξ, S).

Définition d'une solution d'EDSR réfléchie

Une solution d'une EDSR réfléchie est la donnée d'un triplet du processus $(Y, Z, K) := (Y_t, Z_t, K_t)_{0\leq t\leq T}$ $\mathcal{P}_1$-mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^{1+d+1}$ telsque

$$\textbf{\textit{(H4)}} \begin{cases} Y \in \mathcal{S}_1^2(0,T),\ \ Z \in \mathcal{H}_{1\times d}^2(0,T)\ \ et\ \ K \in \mathcal{S}_1^2(0,T) \\ K\ \ est\ un\ processus\ continue\ croissant, (K_0 = 0) \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dW_s,\ \ t \leq T. \\ \forall t \leq T, \quad Y_t \geq S_t\ et \int_0^T (Y_t - S_t)\ dK_t = 0. \end{cases}$$

l'EDSR réfléchie associée aux paramaètres (g, ξ, S).

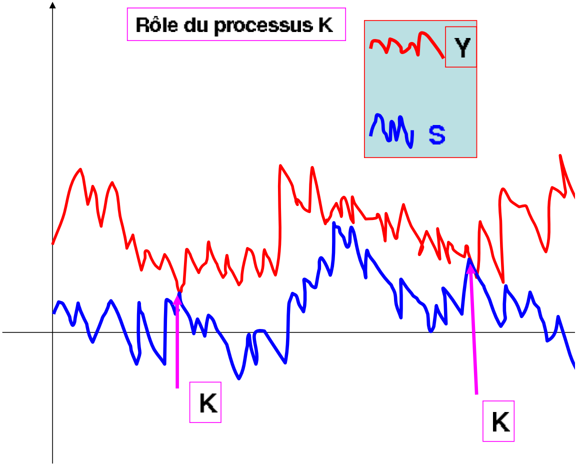
Définition d'une solution d'EDSR réfléchie

Une solution d'une EDSR réfléchie est la donnée d'un triplet du processus $(Y, Z, K) := (Y_t, Z_t, K_t)_{0 \leq t \leq T}$ $\mathcal{P}_1$-mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^{1+d+1}$ telsque

$$
\textbf{\textit{(H4)}} \begin{cases} Y \in \mathcal{S}_1^2(0,T), \;\; Z \in \mathcal{H}^2_{1\times d}(0,T) \;\; et \;\; K \in \mathcal{S}_1^2(0,T) \\ \;K \;\; est \; un \; processus \; continue \; croissant, (K_0 = 0) \\ Y_t = \xi + \displaystyle\int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dW_s, \;\; t \leq T. \\ \forall t \leq T, \quad Y_t \geq S_t \; et \displaystyle\int_0^T (Y_t - S_t) \; dK_t = 0. \end{cases}
$$

l'EDSR réfléchie associée aux paramaètres (g, ξ, S).

Rôle du processus K



Théorème *(Existence)*

L'EDSR réfléchie associée à (g, ξ, S) a une unique solution.

Preuve : **A. Existence via la méthode de pénalisation.**

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T g(s, Y_s^n, Z_s^n)ds + K_T^n - K_t^n - \int_t^T Z_s^n dW_s,\ t \in [0, T],$$

avec, $K_t^n = \displaystyle\int_0^t n(Y_s^n - S_s)^- \, ds,\ t \in [0, T].$

Théorème *(Existence)*

L'EDSR réfléchie associée à (g, ξ, S) a une unique solution.

Preuve : **A. Existence via la méthode de pénalisation.**

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T g(s, Y_s^n, Z_s^n)ds + K_T^n - K_t^n - \int_t^T Z_s^n dW_s, \ t \in [0, T],$$

avec, $K_t^n = \int_0^t n(Y_s^n - S_s)^- \ ds, \ t \in [0, T].$

Preuve (Suite)

B. Existence via l'enveloppe de Snell.

$$\Im_t = \{\nu \textit{temps d'arrêt}; \ t \leq \nu \leq T\}.$$

Définition de l'enveloppe de Snell

Soit $X := (X_t)_{t \leq T}$ un processus réel $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant :

i) X est càdlàg,

ii) X est de classe $[D]$, i.e. la famille des variables aléatoires $\{X_\nu : \nu \in \Im_0\}$ est uniformément intégrable.

L'envellope de Snell de X est *la plus petite surmartingale càd majorant* X, définie par :

$\forall t \leq T, \quad SN(X_t) = esssup_{\nu \in \Im_t} \mathbb{E}[X_\nu | \mathcal{F}_t], \quad SN(X_T) = X_T.$

Preuve (Suite)

B. Existence via l'enveloppe de Snell.

$$\Im_t = \{\nu \textit{temps d'arrêt};\ t \leq \nu \leq T\}.$$

Définition de l'enveloppe de Snell

Soit $X := (X_t)_{t \leq T}$ un processus réel $\mathfrak{F}_t$-adapté vérifiant :

i) X est càdlàg,

ii) X est de classe $[D]$, i.e. la famille des variables aléatoires $\{X_\nu : \nu \in \Im_0\}$ est uniformément intégrable.

L'envellope de Snell de X est *la plus petite surmartingale càd majorant* X, définie par :

$$\forall t \leq T, \quad SN(X_t) = esssup_{\nu \in \Im_t} \mathbb{E}[X_\nu | \mathfrak{F}_t], \quad SN(X_T) = X_T.$$

Preuve (Suite)

B. Existence via l'enveloppe de Snell.

$$\Im_t = \{\nu \textit{temps d'arrêt};\ t \leq \nu \leq T\}.$$

Définition de l'enveloppe de Snell

Soit $X := (X_t)_{t \leq T}$ un processus réel $\mathfrak{F}_t$-adapté vérifiant :

i) X est càdlàg,

ii) X est de classe $[D]$, i.e. la famille des variables aléatoires $\{X_\nu : \nu \in \Im_0\}$ est uniformément intégrable.

L'envellope de Snell de X est *la plus petite surmartingale càd majorant* X, définie par :

$$\forall t \leq T, \quad SN(X_t) = esssup_{\nu \in \Im_t} \mathbb{E}[X_\nu | \mathfrak{F}_t], \quad SN(X_T) = X_T.$$

3. EDSRs et Mathématiques Financières

Terminologie Financière

Option

une ***option*** est un titre donnant à son détenteur *le droit, et non pas l'obligation d'acheter ou de vendre une cetainte quantité* d'un actif financier, à *une date convenue* et à *un prix fixé d'avance*, dans une optique de spéculation ou d'assurance.

Terminologie Financière

Option

une ***option*** est un titre donnant à son détenteur *le droit*, *et non pas l'obligation d'acheter ou de vendre une cetainte quantité* d'un actif financier, à *une date convenue* et à *un prix fixé d'avance*, dans une optique de spéculation ou d'assurance.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :
  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :
  - ***call*** : pour une option d'achat.
  - ***put*** : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :

  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :

  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :

  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.

- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :

  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Terminologie Financière

- *la nature de l'option* :

  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- *l'actif sous-jacent*. On note P_t le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.
- *Le montant*.
- *Le prix d'exercice* (*strike* en anglais), noté K.
- *L'échéance*, notée T.

Modélisation mathématique : Black et Scholes

- $(m+1)$ actifs, les titres de bases P^0, P^1, ...,P^m.
- P_t^i : le prix de l'actif i à la date t.
- un brownien $(W_t)_{t \leq T}$ d-dimensionnel.
- P^0 : $dP_t^0 = P_t^0 r_t dt$, (actif non risqué).
- $P^i_{(1 \leq i \leq m)}$: $dP_t^i = P_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j \right]$ (actifs risqués).

Modélisation mathématique : Black et Scholes

- $(m+1)$ actifs, les titres de bases P^0, P^1, ...,P^m.
- P_t^i : le prix de l'actif i à la date t.
- un brownien $(W_t)_{t\leq T}$ d-dimensionnel.
- P^0 : $dP_t^0 = P_t^0 r_t dt$, (actif non risqué).
- $P^i_{(1\leq i\leq m)}$: $dP_t^i = P_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right]$ (actifs risqués).

Modélisation mathématique : Black et Scholes

- $(m+1)$ actifs, les titres de bases P^0, P^1, ...,P^m.
- P_t^i : le prix de l'actif i à la date t.
- un brownien $(W_t)_{t\leq T}$ d-dimensionnel.
- P^0 : $dP_t^0 = P_t^0 r_t dt$, (actif non risqué).
- $P^i_{(1\leq i\leq m)}$: $dP_t^i = P_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right]$ (actifs risqués).

Modélisation mathématique : Black et Scholes

- $(m+1)$ actifs, les titres de bases P^0, P^1, ...,P^m.
- P_t^i : le prix de l'actif i à la date t.
- un brownien $(W_t)_{t\leq T}$ d-dimensionnel.
- P^0 : $dP_t^0 = P_t^0 r_t dt$, (actif non risqué).
- $P^i_{(1\leq i\leq m)}$: $dP_t^i = P_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right]$ (actifs risqués).

Modélisation mathématique : Black et Scholes

- $(m+1)$ actifs, les titres de bases P^0, P^1, ...,P^m.
- P_t^i : le prix de l'actif i à la date t.
- un brownien $(W_t)_{t\leq T}$ d-dimensionnel.
- P^0 : $dP_t^0 = P_t^0 r_t dt$, (actif non risqué).
- $P^i_{(1\leq i\leq m)}$: $dP_t^i = P_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right]$ (actifs risqués).

Portefeuille

Définition stratégie simple de portefeuille

Une *stratégie simple de portefeuille* écrite sur les titres de base est la donnée :

- $\Theta = \{(t_i)_{i=0}^n ; 0 = t_o < t_1 < t_2 < ... < t_n = T\}$: ensemble fini de dates de trading.
- $\{(\delta_t^i)_{t \leq T} ; i \in [0, m]\}$: $m+1$ processus donnent *la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps* vérifiant : $\delta_t = n_0^i 1_{[0,t_1]}(t) + ... + n_k^i 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + ... + n_{n-1}^i 1_{]t_{n-1},t_n]}(t),$
- $V^\delta = (V_t^\delta)_{t \leq T}$: *La valeur financière (liquidative) du portefeuille* δ *, elle vaut*

$$V_t^\delta = < \delta_t, P_t > = \sum_{i=0}^m \delta_t^i P_t^i .$$

Portefeuille

Définition stratégie simple de portefeuille

Une *stratégie simple de portefeuille* écrite sur les titres de base est la donnée :

- $\Theta = \{(t_i)_{i=0}^{n}; 0 = t_o < t_1 < t_2 < ... < t_n = T\}$: ensemble fini de dates de trading.
- $\{(\delta_t^i)_{t \leq T}; i \in [0, m]\}$: $m + 1$ processus donnent *la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps* vérifiant : $\delta_t = n_0^i 1_{[0,t_1]}(t) + ... + n_k^i 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + ... + n_{n-1}^i 1_{]t_{n-1},t_n]}(t)$,
- $V^\delta = (V_t^\delta)_{t \leq T}$: *La valeur financière (liquidative) du portefeuille* δ *, elle vaut*

$$V_t^\delta = < \delta_t, P_t > = \sum_{i=0}^{m} \delta_t^i P_t^i.$$

Portefeuille

Définition stratégie simple de portefeuille

Une *stratégie simple de portefeuille* écrite sur les titres de base est la donnée :

- $\Theta = \{(t_i)_{i=0}^{n}; 0 = t_o < t_1 < t_2 < ... < t_n = T\}$: ensemble fini de dates de trading.
- $\{(\delta_t^i)_{t \leq T}; i \in [0, m]\}$: $m+1$ processus donnent *la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps* vérifiant : $\delta_t = n_0^i 1_{[0,t_1]}(t) + ... + n_k^i 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + ... + n_{n-1}^i 1_{]t_{n-1},t_n]}(t)$,
- $V^\delta = (V_t^\delta)_{t \leq T}$: *La valeur financière (liquidative) du portefeuille* δ , *elle vaut*

$$V_t^\delta = <\delta_t, P_t> = \sum_{i=0}^{m} \delta_t^i P_t^i.$$

Autofinancement

Définition d'autofinacement

la condition d'autofinacement se traduit par :

$$< n_k, P_{t_{k+1}} >=< n_{k+1}, P_{t_{k+1}} >,$$

soit encore en mettant en évidence la variation des actifs entre les deux dates de renégociation

$$V^{\delta}_{t_{k+1}} - V^{\delta}_{k} =< n_k, P_{t_{k+1}} - P_{t_k} > .$$

Autofinancement

Condition d'autofinancement

(Θ, δ) une stratégie simple de trading autofinançante.

$$\begin{cases} V_t^\delta =< \delta_t, P_t >, \\ V_t^\delta - V_0^\delta = \int_0^t < \delta_s, dP_s > . \end{cases}$$

- Posons $\pi := (\pi_t)_{t \leq T} = ((\delta P)_t)_{t \leq T}$: le vecteurs de composants $(\delta_t^i P_t^i)_{i=1}^m$: *les montants investis dans les titres risqués.*
-

$$dV_t = dV_t^\pi = r_t V_t dt + < \pi_t, \mu_t - r_t \mathbf{1} > dt + < \pi_t, \sigma_t dW_t > .$$

Autofinancement

Condition d'autofinancement

(Θ, δ) une stratégie simple de trading autofinançante.

$$\begin{cases} V_t^\delta =< \delta_t, P_t >, \\ V_t^\delta - V_0^\delta = \int_0^t < \delta_s, dP_s > . \end{cases}$$

- Posons $\pi := (\pi_t)_{t \leq T} = ((\delta P)_t)_{t \leq T}$: le vecteurs de composants $(\delta_t^i P_t^i)_{i=1}^m$: *les montants investis dans les titres risqués.*
-

$$dV_t = dV_t^\pi = r_t V_t dt + < \pi_t, \mu_t - r_t \mathbf{1} > dt + < \pi_t, \sigma_t dW_t > .$$

Stratégie admissible et arbitrage

Stratégie admissible

Une stratégie de portefeuille (V, π) est dite ***admissible*** si elle est *autofinancée* si $V_t \geq 0 \ \forall t \in [0, T]$.

opportunité d'arbitrage

Une stratégie d'***opportunité d'arbitrage*** est une stratégie de portefeuille admissible telsque :

$$\begin{cases} V_0^\pi = 0, \\ \mathbb{P}[V_T^\pi \geq 0] = 1, \\ \mathbb{P}[\{V_T^\pi > 0\}] > 0. \end{cases}$$

Stratégie admissible et arbitrage

Stratégie admissible

Une stratégie de portefeuille (V, π) est dite ***admissible*** si elle est *autofinancée* si $V_t \geq 0 \ \forall t \in [0, T]$.

opportunité d'arbitrage

Une stratégie d'***opportunité d'arbitrage*** est une stratégie de portefeuille admissible telsque :

$$\begin{cases} V_0^\pi = 0, \\ \mathbb{P}[V_T^\pi \geq 0] = 1, \\ \mathbb{P}[\{V_T^\pi > 0\}] > 0. \end{cases}$$

Stratégie admissible et arbitrage

Stratégie admissible

Une stratégie de portefeuille (V, π) est dite ***admissible*** si elle est *autofinancée* si $V_t \geq 0 \; \forall t \in [0, T]$.

opportunité d'arbitrage

Une stratégie d'***opportunité d'arbitrage*** est une stratégie de portefeuille admissible telsque :

$$\begin{cases} V_0^\pi = 0, \\ \mathbb{P}[V_T^\pi \geq 0] = 1, \\ \mathbb{P}[\{V_T^\pi > 0\}] > 0. \end{cases}$$

Stratégie admissible et arbitrage

Stratégie admissible

Une stratégie de portefeuille (V, π) est dite ***admissible*** si elle est *autofinancée* si $V_t \geq 0 \; \forall t \in [0, T]$.

opportunité d'arbitrage

Une stratégie d'***opportunité d'arbitrage*** est une stratégie de portefeuille admissible telsque :

$$\begin{cases} V_0^\pi = 0, \\ \mathbb{P}[V_T^\pi \geq 0] = 1, \\ \mathbb{P}[\{V_T^\pi > 0\}] > 0. \end{cases}$$

Marché complet

actif simulable

On dit que l'actif conditionnel défini par ξ est *simulable* s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant T est égale à ξ.

marché complet

On dit qu'un marché est *complet* si tout actif conditionnel est simulable.

Marché complet

actif simulable

On dit que l'actif conditionnel défini par ξ est *simulable* s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant T est égale à ξ.

marché complet

On dit qu'un marché est *complet* si tout actif conditionnel est simulable.

Évaluation des options européennes via les EDSRs

Définition d'une option européenne

- une option européenne est une variable aléatoire ξ positive et $\mathcal{F}_T$-mesurable.
- $\xi = (P_T^1 - K)^+$.
- $\xi = (K - P_T^1)^+$.

Évaluation des options européennes via les EDSRs

Définition d'une option européenne

- une option européenne est une variable aléatoire ξ positive et $\mathcal{F}_T$-mesurable.
- $\xi = (P_T^1 - K)^+$.
- $\xi = (K - P_T^1)^+$.

Évaluation des options européennes via les EDSRs

Définition d'une option européenne

- une option européenne est une variable aléatoire ξ positive et $\mathcal{F}_T$-mesurable.
- $\xi = (P_T^1 - K)^+$.
- $\xi = (K - P_T^1)^+$.

Problèmatique des Options

- ***Point de vue du vendeur :***

$$\wp_v(\xi) = inf\{x \geq 0; \exists (V, \pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = x\; et\; V_T \geq \xi\}.$$

- ***Point de vue de l'acheteur :***

$$\wp_a(\xi) = sup\{x \geq 0; \exists (V, \pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = -x\; et\; V_T + \xi \geq 0$$

Problèmatique des Options

- ***Point de vue du vendeur*** :

$$\wp_v(\xi) = inf\{x \geq 0; \exists(V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = x\ et\ V_T \geq \xi\}.$$

- ***Point de vue de l'acheteur*** :

$$\wp_a(\xi) = sup\{x \geq 0; \exists(V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = -x\ et\ V_T + \xi \geq 0$$

Problèmatique des Options

- ***Point de vue du vendeur*** :

$$\wp_v(\xi) = inf\{x \geq 0; \exists (V, \pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = x\; et\; V_T \geq \xi\}.$$

- ***Point de vue de l'acheteur*** :

$$\wp_a(\xi) = sup\{x \geq 0; \exists (V, \pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = -x\; et\; V_T + \xi \geq 0$$

Problèmatique des Options

- ***Point de vue du vendeur*** :

$$\wp_v(\xi) = inf\{x \geq 0; \exists (V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = x\ et\ V_T \geq \xi\}.$$

- ***Point de vue de l'acheteur*** :

$$\wp_a(\xi) = sup\{x \geq 0; \exists (V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = -x\ et\ V_T + \xi \geq 0$$

Problèmatique des Options

- ***Point de vue du vendeur*** :

$$\wp_v(\xi) = inf\{x \geq 0; \exists (V,\pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = x\; et\; V_T \geq \xi\}.$$

- ***Point de vue de l'acheteur*** :

$$\wp_a(\xi) = sup\{x \geq 0; \exists (V,\pi)\; tel\; que\; \pi \in \mathcal{A},\; tel\; que\; V_o = -x\; et\; V_T + \xi \geq 0$$

Problèmatique des Options

- prix équitable ou « fair price » pour le prix de l'option.
  $\wp_v(\xi) = X_0 = \wp_a(\xi)$ avec

$$X_0 = inf\{x \geq 0;\ \exists(V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = x\ et\ V_T = \xi\}.$$

Problèmatique des Options

- prix équitable ou « fair price » pour le prix de l'option. $\wp_v(\xi) = X_0 = \wp_a(\xi)$ avec

$$X_0 = inf\{x \geq 0;\ \exists (V,\pi)\ tel\ que\ \pi \in \mathcal{A},\ tel\ que\ V_o = x\ et\ V_T = \xi\}.$$

Valorisation d'ptions européennes via les EDSRs

Théorème *(El Karoui, Peng et Quenez 1997)*

supposons que

- $m{=}d$, $(\sigma_t)_{t\leq T} = (\sigma_t^1, \sigma_t^2, ..., \sigma_t^m)_{t\leq T}$ *: la matrice de volatilité est inversible, bornée avec un inverse borné,*
- $\xi \in L_1^2(\mathcal{F}_T)$ *un droit conditionnel positif.*

La valeur X_0 *est égale à* Y_0 *avec* $(Y_t, \pi_t\sigma_t)_{t\leq T}$ *est la solution de l'EDSR linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dY_t = \{r_t Y_t + \pi_t\sigma_t\theta_t\}\, dt + \pi_t\sigma_t\, dW_t, \\ \theta_t = (\mu_t - r_t\mathbf{1})(\sigma_t)^{-1}, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

$(Y_t)_{t\leq T}$ *est la valeur du même actif contingent à* t *et* Y *est une valeur minimale de portefeuilles admissibles.*

Valorisation d'ptions européennes via les EDSRs

Théorème *(El Karoui, Peng et Quenez 1997)*

supposons que

- $m=d$, $(\sigma_t)_{t\leq T} = (\sigma_t^1, \sigma_t^2, ..., \sigma_t^m)_{t\leq T}$ *: la matrice de volatilité est inversible, bornée avec un inverse borné,*
- $\xi \in L_1^2(\mathcal{F}_T)$ *un droit conditionnel positif.*

La valeur X_0 *est égale à* Y_0 *avec* $(Y_t, \pi_t\sigma_t)_{t\leq T}$ *est la solution de l'EDSR linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dY_t = \{r_t Y_t + \pi_t \sigma_t \theta_t\}\, dt + \pi_t \sigma_t \, dW_t, \\ \theta_t = (\mu_t - r_t \boldsymbol{1})(\sigma_t)^{-1}, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

$(Y_t)_{t\leq T}$ *est la valeur du même actif contingent à* t *et* Y *est une valeur minimale de portefeuilles admissibles.*

Valorisation d'ptions européennes via les EDSRs

Théorème *(El Karoui, Peng et Quenez 1997)*

supposons que

- $m=d$, $(\sigma_t)_{t\leq T} = (\sigma_t^1, \sigma_t^2, ..., \sigma_t^m)_{t\leq T}$ *: la matrice de volatilité est inversible, bornée avec un inverse borné,*
- $\xi \in L_1^2(\mathcal{F}_T)$ *un droit conditionnel positif.*

La valeur X_0 *est égale à* Y_0 *avec* $(Y_t, \pi_t\sigma_t)_{t\leq T}$ *est la solution de l'EDSR linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dY_t = \{r_t Y_t + \pi_t \sigma_t \theta_t\}\, dt + \pi_t \sigma_t \, dW_t, \\ \theta_t = (\mu_t - r_t \boldsymbol{1})(\sigma_t)^{-1}, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

$(Y_t)_{t\leq T}$ *est la valeur du même actif contingent à* t *et* Y *est une valeur minimale de portefeuilles admissibles.*

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

Définition option américaine

$(X_t)_{t\leq T}$, $\mathcal{F}$-adapté avec X_t est *la valeur du droit conditionnel au temps t* s'il exerce à ce moment.
Le temps $\nu : \Omega \longrightarrow [0, T]$, représentant *le moment où le détenteur du droit conditionnel exerce son droit*, doit

$$\forall t \in [0, T], \quad \{w \in \Omega;\ \nu(w) = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- $(X_t, \pi_t)_{t \leq T}$: la stratégie de richesse, un couple de processus dans $\mathcal{H}_1^2(0,T) \times \mathcal{H}_m^2(0,T)$.
- $$-dX_t = b(t, X_t, \pi_t)dt - \pi_t \sigma_t dW_t.$$
- b : une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- $$b(t, x, \pi) = -r_t x - \pi_t \sigma_t \theta_t$$

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- $(X_t, \pi_t)_{t \leq T}$: la stratégie de richesse, un couple de processus dans $\mathcal{H}_1^2(0,T) \times \mathcal{H}_m^2(0,T)$.
- $$-dX_t = b(t, X_t, \pi_t)dt - \pi_t \sigma_t dW_t.$$
- b : une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- $$b(t, x, \pi) = -r_t x - \pi_t \sigma_t \theta_t$$

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- $(X_t, \pi_t)_{t \leq T}$: la stratégie de richesse, un couple de processus dans $\mathcal{H}_1^2(0,T) \times \mathcal{H}_m^2(0,T)$.
- $$-dX_t = b(t, X_t, \pi_t)dt - \pi_t \sigma_t dW_t.$$
- b : une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- $$b(t, x, \pi) = -r_t x - \pi_t \sigma_t \theta_t$$

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- $(X_t, \pi_t)_{t \leq T}$: la stratégie de richesse, un couple de processus dans $\mathcal{H}_1^2(0,T) \times \mathcal{H}_m^2(0,T)$.
- $$-dX_t = b(t, X_t, \pi_t)dt - \pi_t \sigma_t dW_t.$$
- b : une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- $$b(t, x, \pi) = -r_t x - \pi_t \sigma_t \theta_t$$

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- la séléction d'un temps d'arrêt $\nu \in \Im_t$
- ***un payoff*** S_ν lors de l'exercice si $\nu < T$ et égal à ξ si $\nu = T$.
- $$\widetilde{S}_s = \xi \mathbf{1}_{[s=T]} + S_s \mathbf{1}_{[s<T]}, \quad 0 \leq t \leq T.$$
- $$X_t = esssup_{\nu \in \Im_t} X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu).$$

où $X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu) = \mathbb{E}\Big[\int_t^\nu b(s, X_s, \pi_s)ds + \xi \mathbf{1}_{[\nu=T]} + S_\nu \mathbf{1}_{[\nu<T]} \big| \mathcal{F}_t\Big], \ 0 \leq t \leq T.$

Le prix $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ correspond à solution d'une EDSR refléchie associée aux paramètres ; ξ *condition terminale*,b généateur et S c'est *l'obstacle*.

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- la séléction d'un temps d'arrêt $\nu \in \Im_t$
- *un payoff* S_ν lors de l'exercice si $\nu < T$ et égal à ξ si $\nu = T$.
- $$\widetilde{S}_s = \xi \mathbf{1}_{[s=T]} + S_s \mathbf{1}_{[s<T]}, \quad 0 \leq t \leq T.$$
- $$X_t = esssup_{\nu \in \Im_t} X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu).$$

  où $X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu) = \mathbb{E}\left[\int_t^\nu b(s, X_s, \pi_s)ds + \xi \mathbf{1}_{[\nu=T]} + S_\nu \mathbf{1}_{[\nu<T]} | \mathcal{F}_t\right], \; 0 \leq t \leq T.$

Le prix $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ correspond à solution d'une EDSR refléchie associée aux paramètres ; ξ *condition terminale*,b généateur et S c'est *l'obstacle*.

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- la séléction d'un temps d'arrêt $\nu \in \Im_t$
- ***un payoff*** S_ν lors de l'exercice si $\nu < T$ et égal à ξ si $\nu = T$.
- $$\widetilde{S}_s = \xi \mathbf{1}_{[s=T]} + S_s \mathbf{1}_{[s<T]}, \quad 0 \leq t \leq T.$$
- $$X_t = esssup_{\nu \in \Im_t} X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu).$$

où $X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu) =$

$$\mathbb{E}\Big[\int_t^\nu b(s, X_s, \pi_s)ds + \xi \mathbf{1}_{[\nu=T]} + S_\nu \mathbf{1}_{[\nu<T]} | \mathcal{F}_t\Big], \; 0 \leq t \leq T.$$

Le prix $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ correspond à solution d'une EDSR refléchie associée aux paramètres ; ξ *condition terminale*,b généateur et S c'est *l'obstacle*.

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

- la séléction d'un temps d'arrêt $\nu \in \Im_t$
- ***un payoff*** S_ν lors de l'exercice si $\nu < T$ et égal à ξ si $\nu = T$.
- $$\widetilde{S}_s = \xi \mathbf{1}_{[s=T]} + S_s \mathbf{1}_{[s<T]}, \quad 0 \leq t \leq T.$$
- $$X_t = esssup_{\nu \in \Im_t} X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu).$$

où $X_t(\nu, \widetilde{S}_\nu) =$
$$\mathbb{E}\Big[\int_t^\nu b(s, X_s, \pi_s)ds + \xi \mathbf{1}_{[\nu=T]} + S_\nu \mathbf{1}_{[\nu<T]} | \mathcal{F}_t\Big], \; 0 \leq t \leq T.$$

Le prix $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ correspond à solution d'une EDSR refléchie associée aux paramètres ; ξ *condition terminale*, b généateur et S c'est *l'obstacle*.

Évaluation d'options américaines via les EDSRs

Préposition

Il existe $\pi = (\pi_t)_{t \le T} \in \mathcal{H}_1^2(0,T)$ et un processus continue croissant $K = (K_t)_{t \le T}$ sachant $K_0 = 0$ tels que

$$\begin{cases} -dX_t = b(t, X_t, \pi_t)dt + dK_t - \pi_t dW_t, \\ X_T = \xi, \\ \forall t \le T,\ X_t \ge S_t \ et\ (X_t - S_t)dK_t = 0. \end{cases}$$

De plus, le temps d'arrêt $D_t = inf\{s \ge t, X_s = S_s\} \wedge T$ est optimal après t c'est à dire que

$$X_t = X_t(D_t, \widetilde{S}_{D_t}).$$

Références

- Pardoux E. et S. Peng (1990) :
"Adapted Solutions of Backward Stochastic Differential Equations",
Systems and Control Letters, 14, 55-61.

- El Karoui N., C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng et M.C. Quenez (1997) :
"Reflected Solutions of Backward SDE and Related Obstacle Problems for PDEs",
Ann. Probab., 25, 2, 702-737.

- El Karoui N., E. Pardoux et M.C. Quenez (1997) :
"Reflected backward stochastic differential equations and American Options",
Numerical Methods in Finance (L. Robers and D. Talay eds.), Cambridge U.P., 215-231.

Merci pour votre attention !