MT22 : TD N°10

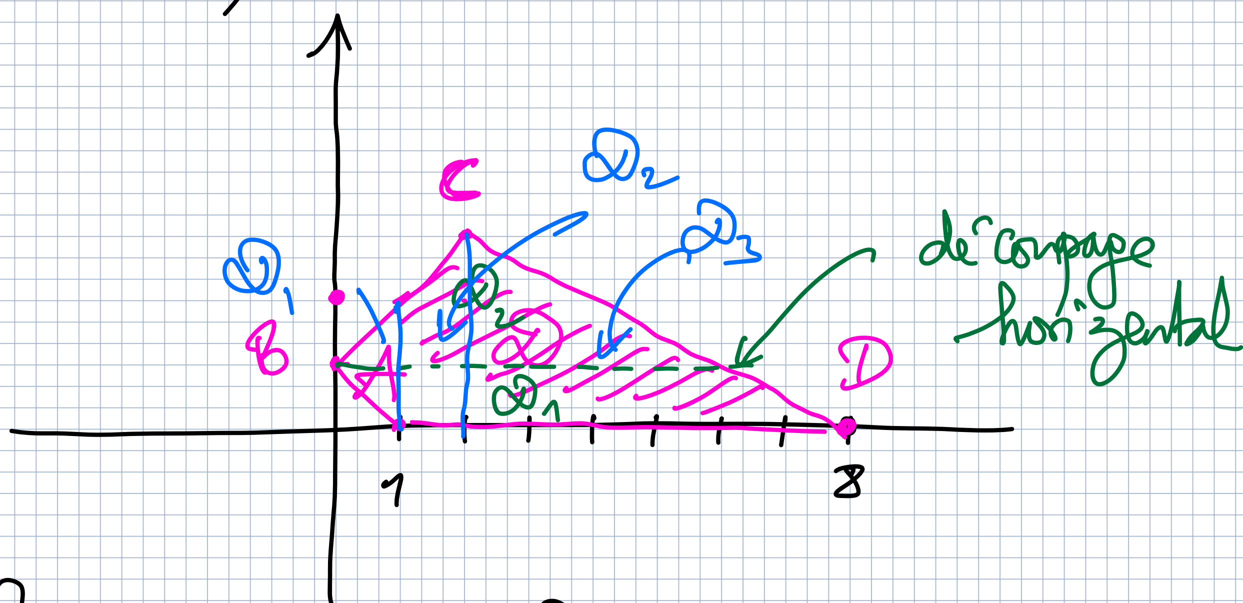
M-A. Alaya

Programme Chapitre 4

- Ex A.2.3 : (1°) et (2°)
- Ex A-2-6 :
- Ex A.2.7

Ex A.2.3 Intégrale double sur des domaines non rectangulaires.

(1) $\mathcal{D}$ = le domaine délimité par le quadrilatère ABCD avec $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,3)$ et $D(8,0)$



(a) $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = ?$

Il s'agit de découper le polygone pour pouvoir appliquer la formule de Fubini sur chaque sous domaine. Commençons par déterminer les paramétrisations des segments définissant le bord de $\mathcal{D}$

- $M(x,y) \in (AB) \iff y = 1-x \iff x = 1-y$

$M(x,y) \in (BC) \iff y = 1+x \iff x = y-1$

$M(x,y) \in (CD) \iff y = 4 - x/2 \iff x = 8-2y$

$M(x,y) \in (AD) \iff y = 0$

Méthode 1 : découpage horizontal :

On a $\mathcal{D}_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1$ et $1-y \leq x \leq 8-2y \}$

et $\mathcal{D}_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3$ et $y-1 \leq x \leq 8-2y \}$

Rappel :

Théorème 4.3.1 (Fubini). *Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$, $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et telles que $\phi_1 \leq \phi_2$. Soient D le domaine suivant*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

et f continue sur D. Alors, f est intégrable sur D et

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

On en déduit que pour toute fonction continue et bornée sur $\mathcal{D}$ on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

<u>Méthode 2 :</u> <u>Découpage horizontal :</u>

On a $\mathcal{D}_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1$ et $1-x \leq y \leq 1+x \}$

$\mathcal{D}_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1+x \}$

$\mathcal{D}_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 8$ et $\leq y \leq 4-\frac{x}{2} \}$

On en déduit que toute fonction continue et bornée sur $\mathcal{D}$ on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{1+x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_0^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(b) Rappel : moment d'inertie :

Définition 4.4.4. *Le **moment d'inertie de la plaque** D **par rapport à la droite** Δ est défini par :*

$$\mathcal{I}_\Delta = \int\int_D [d(M,\Delta)]^2 \mu(x,y)\,dx\,dy$$

où $d(M,\Delta)$ représente la distance du point $M(x,y)$ à la droite Δ.

$$\mathcal{I}_{(Oy)} = \iint_{\mathcal{D}} x^2 \mu(x,y)\,dx\,dy$$

La distance d'un point $M(x,y)$ à l'axe des abscisses Δ est :

$d(M,\Delta) = |y|$. d'où le moment d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à Δ est égale à :

$$\mathcal{I}_\Delta = \iint_{\mathcal{D}} y^2\,dx\,dy$$

avec l'une ou l'autre méthode vues (Question a).

Méthode 1 :

$$\mathcal{I}_\Delta = \iint_{\mathcal{D}} y^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} y^2\,dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} y^2\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 y^2 (7-y)\,dy + \int_1^3 y^2 (9-3y)\,dy$$

$$= \left[\frac{7y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + \left[3y^3 - \frac{3y^4}{4}\right]_1^3$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{4} + 81 - \frac{3}{4} \times 81 - 3 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{241}{12}.$$

2) soit $h > 0$.

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x \,,\, y \geq 0, x \leq h\}$

Le domaine est déjà étudié au chapitre 3.

Ex A.2.1.

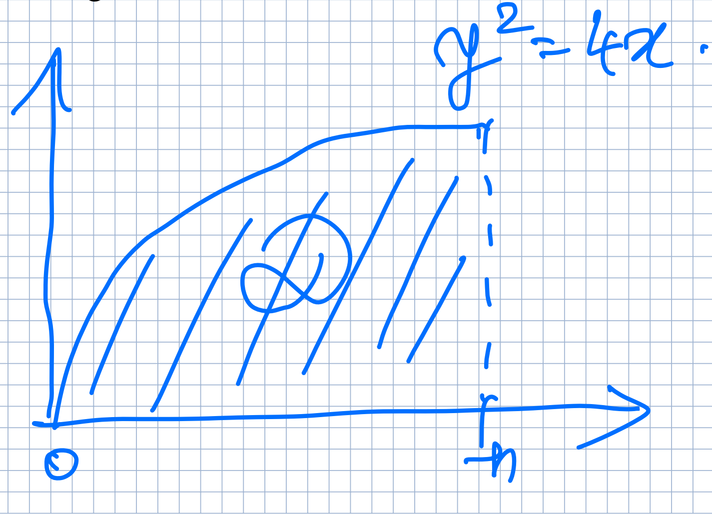
Méthode 1:

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h$ et $0 \leq y \leq 2\sqrt{h}\}$

$\mathcal{D}$ (m)

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dx\,dy \right)$$

Méthode 2:



$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2\sqrt{h}$ et $y^2/4 \leq x \leq h\}$

Par Fubini, toute fonction intégrable f sur $\mathcal{D}$, on a

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\sqrt{h}} \left(\int_{y^2/4}^{h} f(x,y)\,dx \right) dy$$

(b) Rappel :

On considère une plaque plane de faible épaisseur qu'on assimile à un ensemble quarrable D du plan (xOy).

Définition 4.4.1. *On appelle* ***masse surfacique*** *au point $M \in D$ le réel $\mu(M)$ qui représente la masse par unité de surface de cette plaque et qui peut dépendre de la position de M.*

Définition 4.4.2. *On appelle* ***masse totale*** *de la plaque D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ le nombre réel* ***positif*** *m défini par l'intégrale double :*

$$m = \int\int_D \mu(M)\,dx\,dy$$

où M décrit D.

Définition 4.4.3. *On appelle* ***centre d'inertie*** *de la plaque D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ le point G dont les coordonnées sont données par les intégrales doubles :*

$$x_G = \frac{1}{m}\int\int_D \mu(M)\,x\,dx\,dy$$

$$y_G = \frac{1}{m}\int\int_D \mu(M)\,y\,dx\,dy$$

ce qui vectoriellement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} \\
&= \frac{1}{m}\left(\int\int_D \mu(M)\,x\,dx\,dy\right)\vec{\imath} + \frac{1}{m}\left(\int\int_D \mu(M)\,y\,dx\,dy\right)\vec{\jmath} \\
\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m}\int\int_D \mu(M)\,\overrightarrow{OM}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

On a $m = \iint_D 1 \, dx\, dy = \text{Aire}(D)$.

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \, dx \, dy$$

d'où

$$m = \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{x}} 1 \, dy = \int_0^h 2\sqrt{x} \, dx = 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^h$$

$$= \frac{4}{3} h^{3/2}.$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{4}{3} h^{3/2}} \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{x}} x \, dy \right) dx$$

$$= \frac{3}{4h^{3/2}} \int_0^h 2x\sqrt{x} \, dx$$

$$= \frac{3}{2h^{3/2}} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^h$$

$$= \frac{3}{2h^{3/2}} \times \frac{h^{5/2}}{5/2} = \frac{3}{5} h$$

$$y_G = \frac{1}{\frac{4}{3} h^{3/2}} \int_0^{2\sqrt{h}} \left(\int_{y^2/4}^{h} y \, dx \right) dy$$

$$= \frac{3}{4h^{3/2}} \int_0^{2\sqrt{h}} y\left(h - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \frac{3}{4h^{3/2}} \left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} \right]_0^{2\sqrt{h}}$$

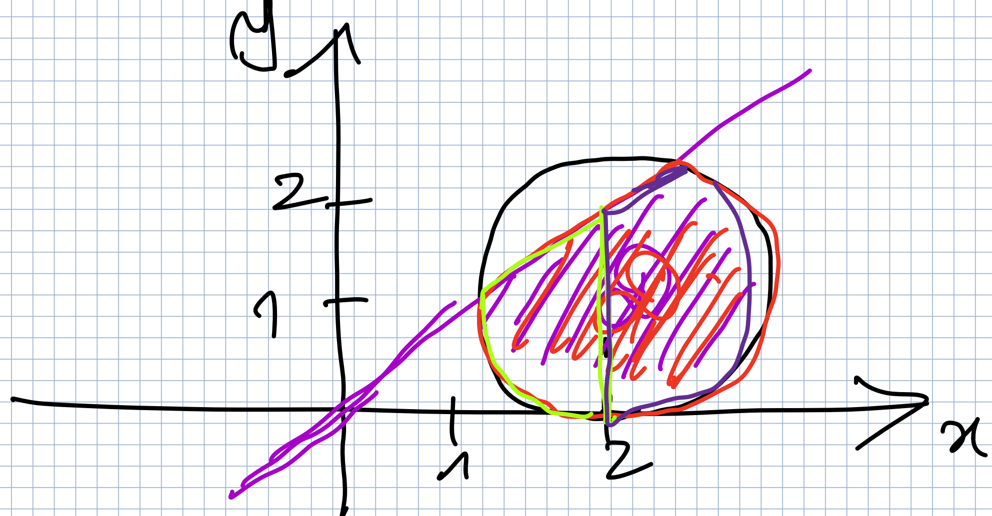
$$= \frac{3}{4h^{3/2}} \times \left(2h^2 - h^2\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{h}.$$

Ex 1.2.6 :

soit $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y \leq x \end{array} \right\}$

1) Le domaine $\mathcal{D}$ est un disque de centre $(2,1)$ et de rayon 1, tronqué par le demi-plan inférieur de frontière la droite d'équation $y = x$



- Nous avons besoin de découper le domaine $\mathcal{D}$ en 2 sous-domaines pour appliquer le théorème de Fubini. On a :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq x \right\}$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-(x-2)^2} \right\}$$

On obtient ainsi

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

<u>Autre découpage :</u>

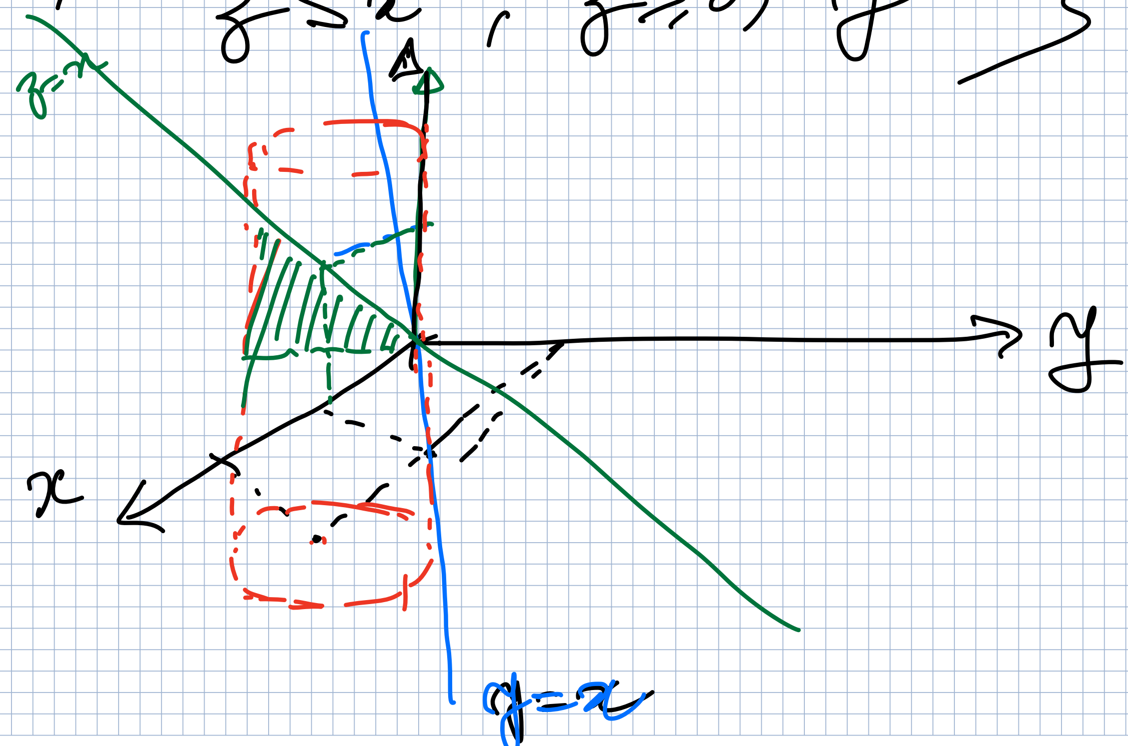
$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \; 2 - \sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2} \right\}$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq y \leq 2 \text{ et } y \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2} \right\}$$

Ainsi

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2°) $\mathcal{V} = \{$ cylindre $(x=2, y=1)$, $z \leq x$, $z \geq 0$, $y \leq x \}$



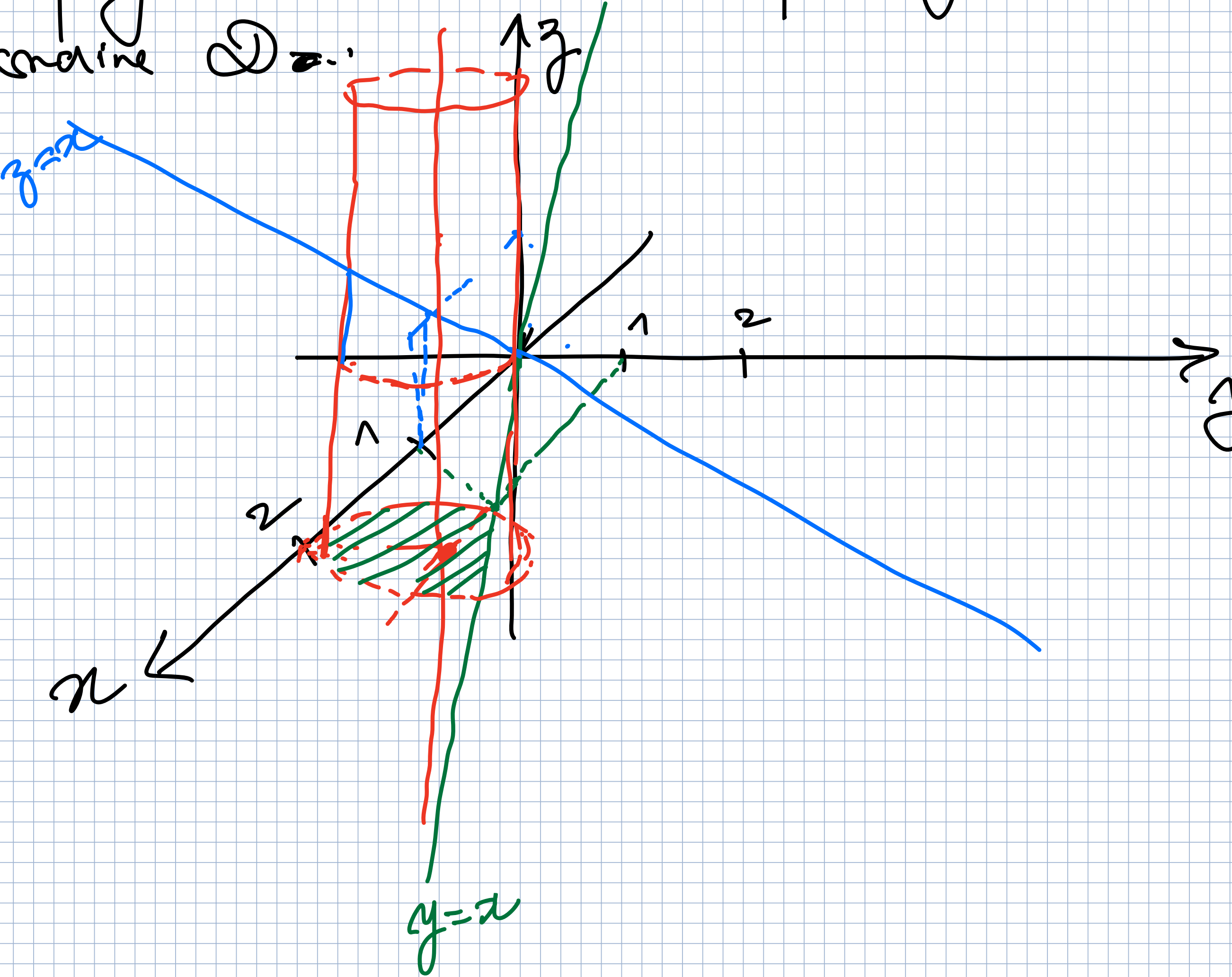
cylindre : $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

(a) La projection du volume $\mathcal{D}$ ~~dans~~ sur le plan $z=0$ est le domaine de définition des variables (x,y). De la définition de $\mathcal{D}$, il en ressort que (x,y) satisfont les conditions suivantes.

$$(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1 \text{ et } y \leq x$$

$$\text{et } \quad 0 \leq z \quad \text{et} \quad z \leq x \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0.$$

La projection de $\mathcal{D}$ dans le plan $z=0$ est le domaine $\mathcal{D}_z$:



(b) On considère le volume $\mathcal{D}$ est le solide de $\mathbb{R}^3$ et dont la face supérieure est positionnée dans le plan $z = x$. Le volume V est donné par la ~~for~~ formule

$$\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x \, dx \right) dy$$

$$+ \int_1^2 \left(\int_y^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} dy + \int_1^2 \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} \right) dy$$

$$= \int_0^1 4\sqrt{1-(y-1)^2} \, dy + \int_1^2 \left[\frac{5-(y-1)^2-y^2}{2} + 2\sqrt{1(y-1)^2} \right] dy$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} \, dy + \int_1^2 (2-y^2+y) \, dy$$

$$+\ 2\int_1^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

On effectue le changement de variable $\sin\theta = y-1$ dans la première et la troisième intégrale

$dy = \cos\theta\, d\theta$

$y = 0 \Leftrightarrow \theta = -\pi/2$

$y = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$

$y = 2 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,dy\,dx = 4\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2(\theta)\,d\theta + \left[2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 + 2\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\,d\theta$$

Sachant que $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$. on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy = 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{0}$$

$$+\ 4 - \frac{8}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{3} \cancel{-} \frac{1}{2}$$

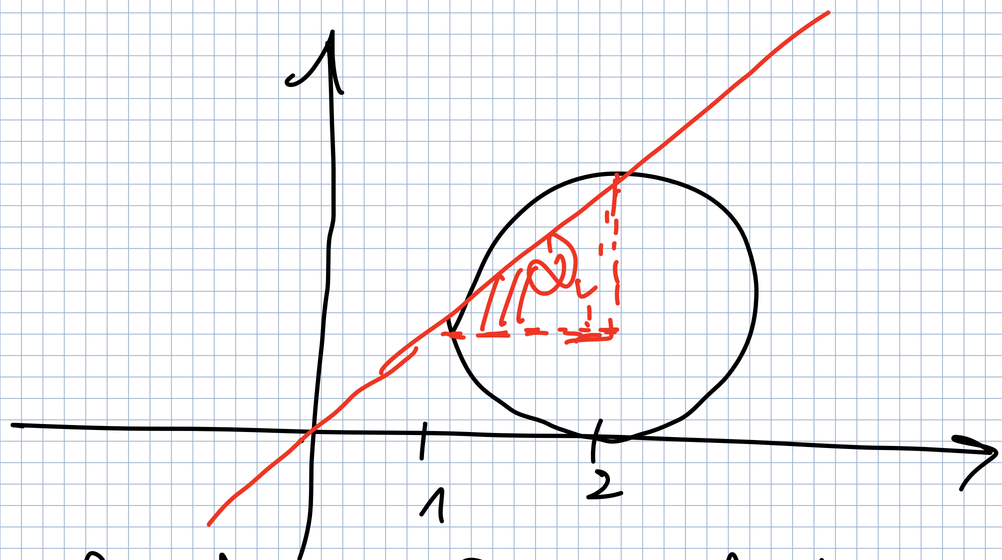
$$+\ \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi + \frac{7}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6} + \frac{3\pi}{2}.$$

3) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x \leq 2, y \leq x\}$

et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$.

(a)



D'après le schéma $\mathcal{D}_2$ est le trois-quart de disque de centre $(2,1)$ et de rayon 1. paramétrable en coordonnées polaires de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = 1 + r\sin\theta \end{cases}$$

avec $\theta \in [-\pi/2, \pi]$ et $r \in [0,1]$.

Le jacobien associé à ce changement de variable est $J = r$. En notant

$\Delta = [0,1] \times [-\pi/2, \pi]$. on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}_c} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(2+r\cos\theta,\ 1+r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

b) Pour retrouver le volume V on doit effectuer le calcul suivant

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}_1} x\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{D}_2} x\,dx\,dy$$

on a $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_2} x\,dx\,dy = \iint_{\Delta} (2+r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi/2} r(2+r\cos\theta)\,d\theta\right) dr$$

$$= \int_0^1 \Big[r(2\theta+r\sin\theta)\Big]_{-\pi}^{\pi/2} dr$$

$$= \int_0^1 r(3\pi+r)\,dr =$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

Maintenant,

$$\iint_{\mathcal{D}_1} x\,dx\,dy \; ; \quad \mathcal{D}_1 \text{ est un triangle rectangle}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq x \leq 2 \text{ et } y \leq x.$$

$$\iint_{\mathcal{D}_1} x\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_y^2 x \, dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\int_1^x x \, dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left[x y \right]_1^x dx = \int_1^2 x(x-1)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

<u>Conclusion :</u> le volume V est égale à

$$V = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{7}{6}.$$

<u>Ex A-2-7 :</u> (voir correction poly. interactif).