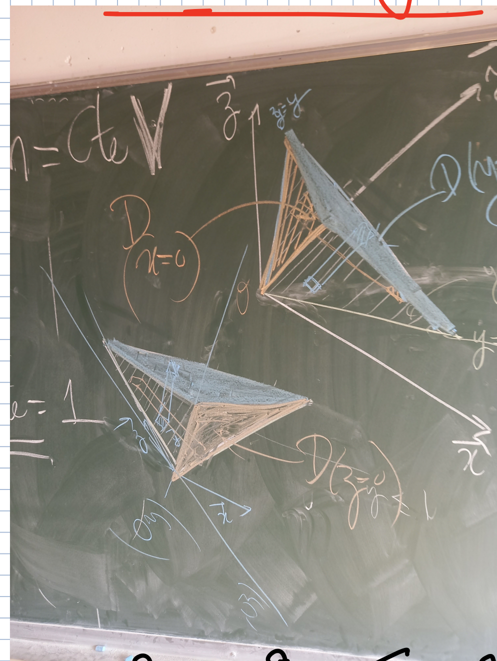
TD N°11 : MT22 M. Z. Alaya



Programme chapitre 5

Ex A.2.1

Ex A.2.5

Ex A.2.1 (Fubini)

1) On définit le domaine de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ z \geq 0,\ x-2y+2z \leq 0,\ y \leq 1\}$$

Rappel :

5.3.2 Calcul avec la méthode des bâtonnets

On suppose que l'ensemble d'intégration D considéré peut être défini par :

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in A,\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\}$$

où A est une partie de $\mathbb{R}^2$ et ϕ_1, ϕ_2 des fonctions de A dans $\mathbb{R}$, on pourrait dire que A est l'ombre de D sur le plan (xOy) si on éclaire D suivant (Oz) (cf. figure V.3.1). D est alors un cylindre formé sur la courbe limitant A que l'on a fermé avec les surfaces

$$\Sigma_1 : z = \phi_1(x,y) \text{ et } \Sigma_2 : z = \phi_2(x,y)$$

Théorème 5.3.1. *Sous ces hypothèses faites sur D, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, on a :*

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int_A \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dxdy$$

Le calcul de $F(x,y) = \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ correspond à un découpage de D suivant des bâtonnets parallèles à (Oz) (cf. figure V.3.2), dont la section infinitésimale correspond au quadrillage de l'ensemble A.
On rassemble tous ces bâtonnets lorsque l'on calcule

$$\int\int_A F(x,y)dxdy$$

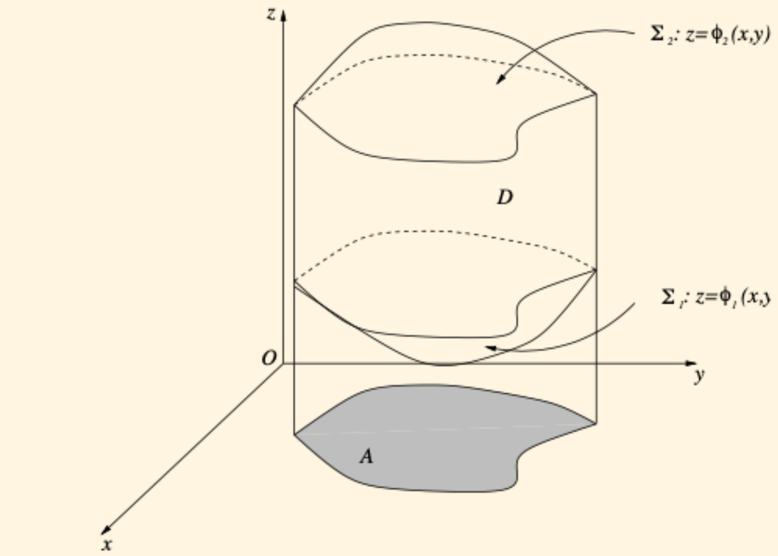


FIGURE 5.3.1 – Ensemble pour lequel on peut appliquer la méthode des bâtonnets

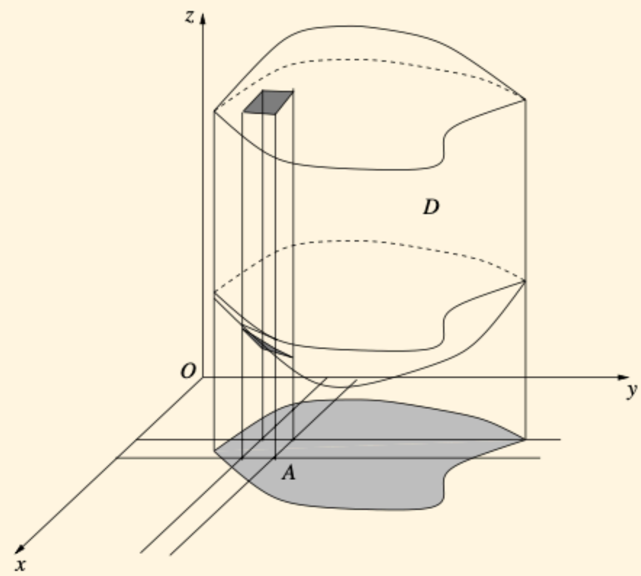


FIGURE 5.3.2 – Un bâtonnet

La méthode des bâtonnets consiste à déterminer la projection du volume dans l'un des trois plan $(x=0)$ ou $(y=0)$ ou $(z=0)$ puis déterminer les équations des faces inférieurs et supérieures selon les directions (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

Méthode 1 : Projection sur le plan $x=0$.

Alors $z \geq 0$, $y \leq 1$ et $2y - 2z \geq 0$

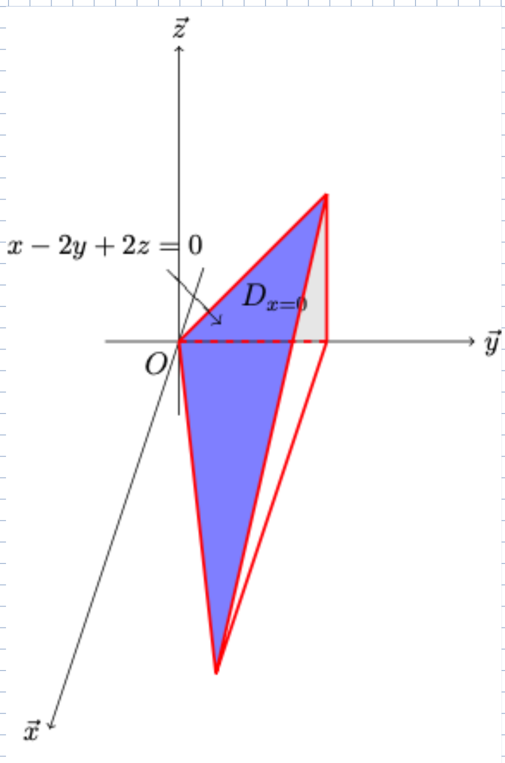
qui définit la projection

$$D_{(x=0)} := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0,\ y \leq 1 \text{ et } y \geq z\}$$

$$= \{0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq y\}$$

En suite pour chaque point $(x,y) \in D_{(x=0)}$ on encadre le bâton parallèle à (Ox) avec les données de l'énoncé,

$$0 \leq x \leq 2y - 2z.$$ On a donc



$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_{D(x=0)} \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)\, dx \right) dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)\, dx \right) dz \right) dy$$

Méthode 2 : Projection sur le plan $y=1$

Cela correspond au domaine de définition des variables (x,z) tels que

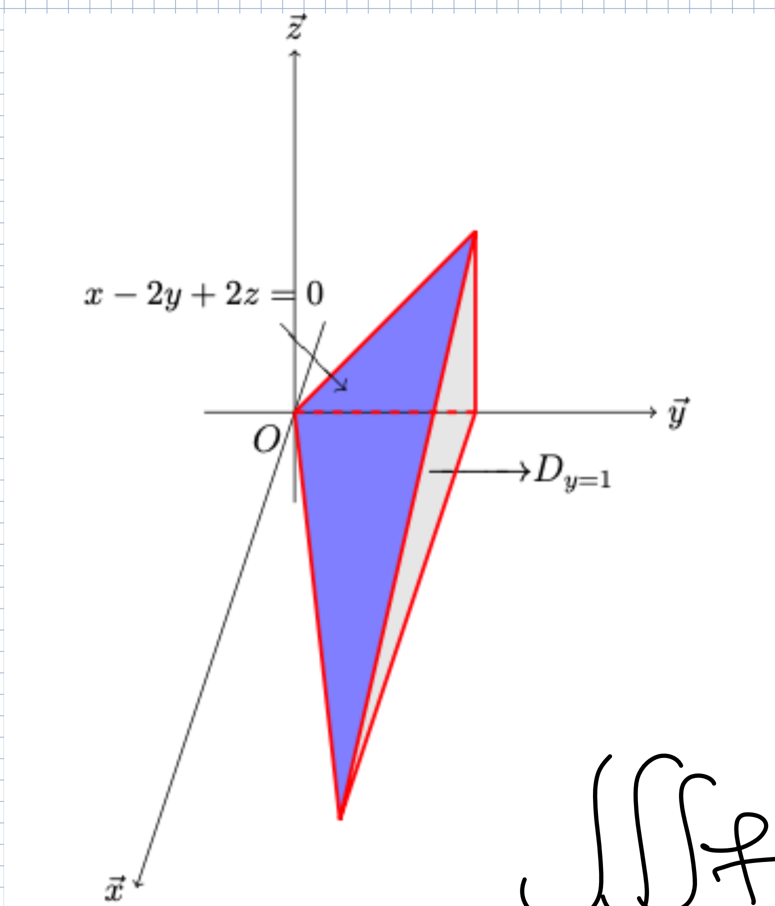
$$x \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad (y \leq 1 \text{ et } x + 2z \leq 2y) \Rightarrow x + 2z \leq 2.$$

Ceci définit la projection

$$D_{(y=1)} = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0,\ x \geq 0 \text{ et}$$

$x + 2z \leqslant 2 \}$

$$= \{ 0 \leqslant z \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 2 - 2z \}$$



Ensuite pour chaque point $(x,z) \in D_{(y=1)}$ On rencontre le bâtonnet parallèle à (Oy) avec les données de l'énoncé:

$$\frac{x}{2} + z \leqslant y \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{D(y=1)} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)\,dy \right) dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2z} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)\,dy \right) dx \right) dz$$

Méthode 3 : Projection sur le plan $z=0$

Cela correspond au domaine de définition des variables (x,y)

$$x \geq 0 \;,\; y \leq 1 \text{ et } (z \geq 0 \text{ et } 2z \leq 2y - x)$$

$$\Longrightarrow 2y - x \geq 0$$

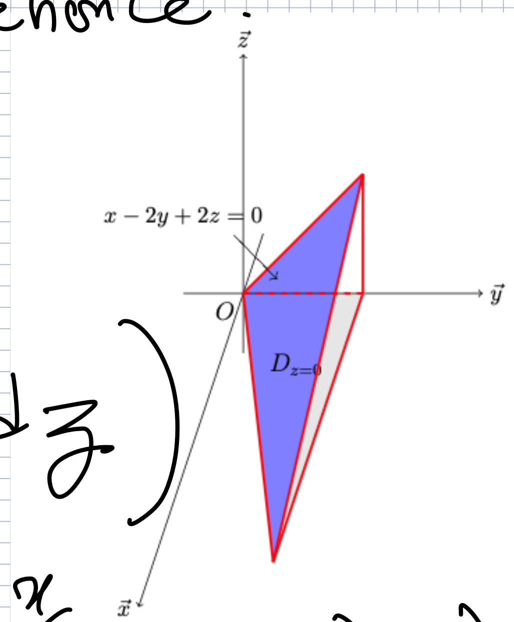
Ceci définit la projection.

$$D_{(z=0)} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 ,\, y \leq 1 \text{ et } 2y - x \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ 0 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

Ensuite pour chaque point $(x,y) \in D_{(z=0)}$ on encadre le bâton parallèle à (Oz) avec les données de l'énoncé :

$$0 \leq z < y - \frac{x}{2} \,.$$ Ainsi



$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{D(z=0)} \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x,y,z)\, dz \right)$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

2°) On utilise l'une des formules précédentes pour calculer successivement

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{3}$$

$$x_G = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} y \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{4}$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} z \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{4}$$

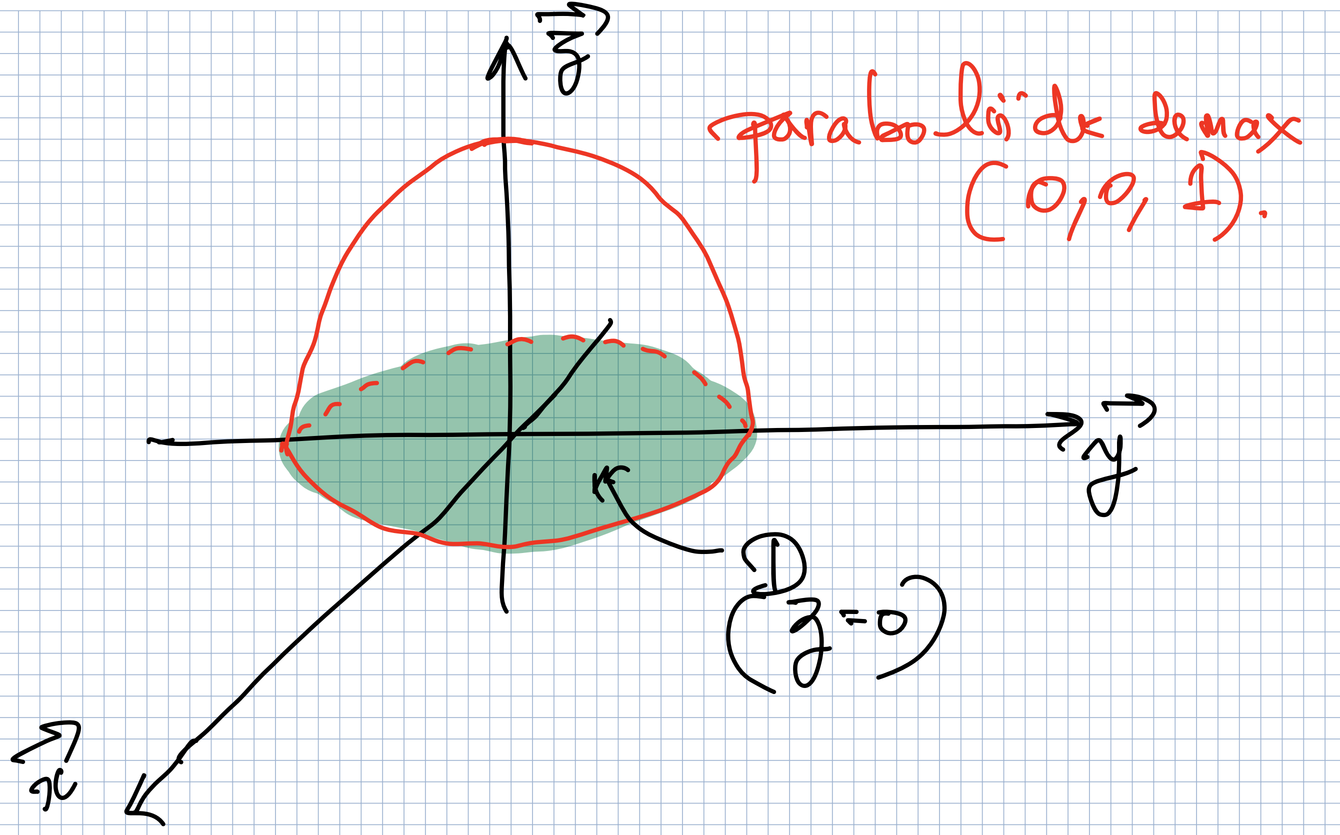
Exercice A.2.2 Fubini, coordonnées cylindriques.

1) soit

$$\mathcal{V} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \}$$

$$z \leq 1 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \leq 1 - z$$

$$\Rightarrow z \leq 1$$



1°) 1ère méthode : méthode des bâtons.

On projete le volume sur le plan $z=0$. Le domaine de définition des variables (x, y) est évidemment

$$0 \leq 1 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \leq 1.$$

Il s'agit d'un disque unité ($D_{z=0}$) sur lequel on intègre par changement de variable en polaire.

D'après l'énoncé on a $\quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$

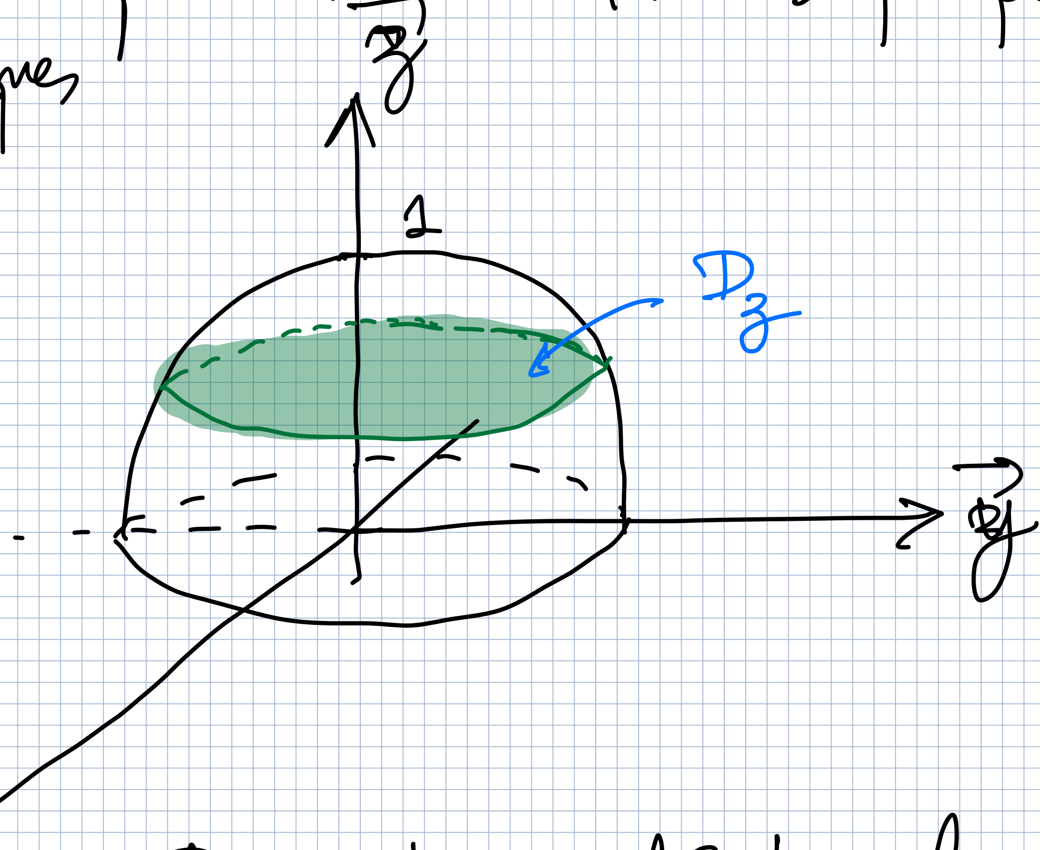
$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_{D(z=0)} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\int_0^{1-r^2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, dz \right) dr\, d\theta$$

Méthode 2 : Méthode des tranches :

On observe que le volume est une superposition des disques



Ces disques D_z sont appelés tranches d'équation $x^2+y^2 = 1-z$, $z \leq 1$. z fixé.

Rappel :

5.3.3 Calcul par la méthode des tranches

On suppose, ce qui n'exclut pas forcément le cas précédent, que l'ensemble cubable D peut être défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \gamma \leq z \leq \delta,\ (x, y) \in D_z\}$$

où D_z est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ qui dépend de la *cote* z et qui correspond à la coupe de l'ensemble D suivant un plan parallèle à (xOy) (cf. figure V.3.3) : $D_{z_0} = D \cap \mathscr{P}_0$ où $\mathscr{P}_0$ est le plan d'équation $z = z_0$.

Théorème 5.3.2. *Sous ces hypothèses faites sur D, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, on a :*

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_\gamma^\delta \left(\int\int_{D_z} f(x, y, z)\,dx\,dy\right) dz$$

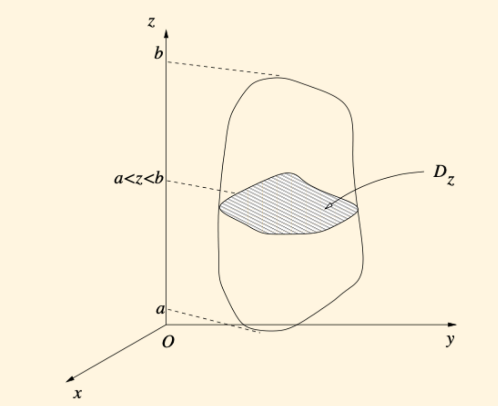


FIGURE 5.3.3 – Méthode des tranches

Cela correspond cette fois à un découpage de l'ensemble D en tranches D_z parallèles à (xOy), on calcule, à z fixé :

$$F(z) = \int\int_{D_z} f(x, y, z)\,dx\,dy$$

grâce aux méthodes du chapitre précédent, puis on empile ces tranches pour le calcul de :

$$\int_\gamma^\delta F(z)\,dz = \int\int\int_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Pour tout $0 \leq z \leq 1$, on note

$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - z\}$

La méthode des tranches consiste à superposer des intégrales surfaciques sur D_z :

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)\,dx\,dy\right) dz$$

Or D_z est un disque de rayon $\sqrt{1-z}$.
on utilise un changement de variable
en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$r \in [0, \sqrt{1-z}]$$

on a $J = r$.

donc

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{[0,\sqrt{1-z}]\times[0,2\pi]} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \right) dr \right) dz$$

2) On pose $f(x,y,z) = 1$. le volume est

$$V = \iiint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-r^2} r \, dz \right) d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r - r^3) \, d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= \pi/2$$

ou bien

$$V = \iiint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r \, d\theta \right) dr \right) dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]^{\sqrt{1-z}} dz$$

$$= 2\pi \left[- \frac{(1-z)^2}{4} \right]_0^1 = \pi/2$$

3) on a $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

Rappels :-

Soient D et Δ des ensembles cubables de $\mathbb{R}^3$, on notera :
- (x, y, z) les points de D ;
- (u, v, w) les points de Δ.

Définition 5.3.1. *On désignera par **changement de variables** de Δ sur D toute application :*

$$\Phi : \Delta \longrightarrow D$$

$$(u, v, w) \longmapsto \Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \alpha(u, v, w) \\ \beta(u, v, w) \\ \gamma(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

telle que :
- *Φ est bijective de Δ sur D ;*
- *α, β et γ sont des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur Δ ;*
- *Si on écrit u, v et w en fonction de $(x, y, z) \in D$ à l'aide de Φ^{-1} (bijection réciproque), on obtient encore des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur D.*

Définition 5.3.2. *On appelle **jacobien** d'un changement de variables Φ l'expression, donnée par le **produit mixte** des vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial w}$:*

$$J_\Phi(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Théorème 5.3.3. *Soient Δ, D deux ensembles bornés et cubables de $\mathbb{R}^3$, $\Phi : \Delta \to D$ est un changement de variables de Δ sur D. On suppose que la fonction*

$$(u, v, w) \longmapsto J_\Phi(u, v, w)$$

reste bornée sur Δ. Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(\Delta)$, alors la fonction

$$(u, v, w) \longmapsto f \circ \Phi(u, v, w)$$

est intégrable sur Δ et on a :

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w)) \, |J_\Phi(u, v, w)| \, du\, dv\, dw$$

5.3.5 Passage aux coordonnées cylindriques

Les formules de changement de variables sont dans ce cas :

$$\Phi : (\rho, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} x(\rho,\theta,z) & = & \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta,z) & = & \rho\sin\theta \\ z(\rho,\theta,z) & = & z \end{pmatrix}$$

Le triplet (ρ, θ, z) constitue un système de coordonnées cylindriques. En choisissant $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ on définit une bijection de $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ (éventuellement une bijection d'un sous-ensemble Δ sur un autre sous-ensemble D).

$\forall(\rho, \theta, z) \in]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R}$

$$J_\Phi(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Pour passer en coordonnées cylindriques dans une intégrale triple, on remplace

- D par le domaine des (θ, ρ, z) correspondant $(\Phi^{-1}(D) = \Delta)$;
- $f(x, y, z)$ par $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$;
- $dx\,dy\,dz$ par $\rho\,d\theta\,d\rho\,dz$.

on a $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

Pour intégrer sur $\mathcal{V}$ on peut utiliser les coordonnées cylindriques :

on a $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad \rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$

on a $0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2) = 1 - \rho^2$

$\Rightarrow 0 \leq z \leq 1 - \rho^2$.

$\Rightarrow 0 \leq \rho \leq 1$.

Puisque $z \geq 0 \implies 1-\rho^2 \geq 0$

$\implies 1 \geq \rho^2$

$\implies 1 \geq \rho.$

d'où $\rho \in [0,1]$; $z \in [0, 1-\rho^2]$.

$\theta \in [0, 2\pi]$.

Ainsi

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\rho^2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\, \rho\, dz \right) d\theta \right) d\rho$$

Alors:

$$V = \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\rho^2} \rho\, dz \right) d\theta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cdot (1-\rho^2)\, d\theta\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1}$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} .$$