TD N°7 : MT22 — M.Z. Alaya

Chap (III)

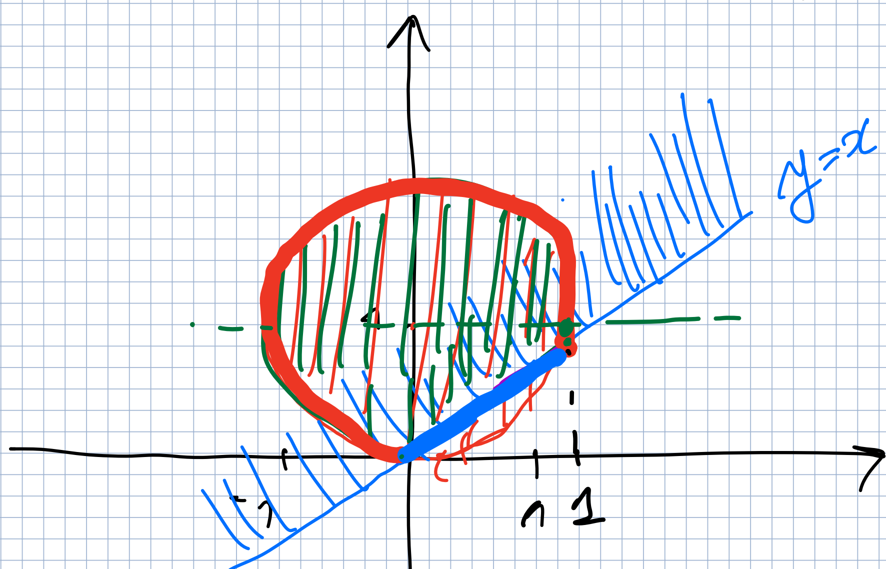
Programme : Ex A.2.1 : (2) ; (3) ; (4) ; (6)

Ex A.2.6 : (1) ; (2) ; (3)

Ex A.2.1 Paramétrage de bords de domaines de $\mathbb{R}^2$.

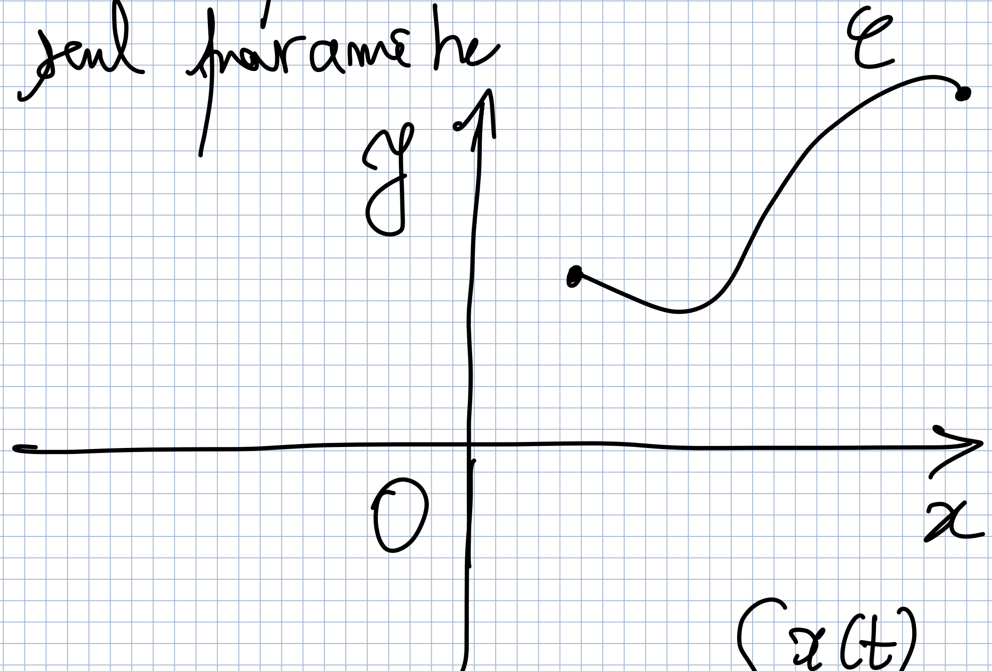
Faire un dessin de $\mathcal{D}$ et paramétrer son bord.

(2) $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ et } y \geq x \right\}$



$$\mathcal{D} = \underbrace{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \right\}}_{\text{disque fermé de centre } M(0,1)} \cap \overbrace{\left\{ (x,y) : y \geq x \right\}}^{\text{demi-plan}}$$

Rappel: Pour paramétrer une courbe $\mathcal{C}$ du plan (xOy), il faut exprimer les coordonnées (x,y) d'un point M sur la courbe en fonction d'un seul paramètre

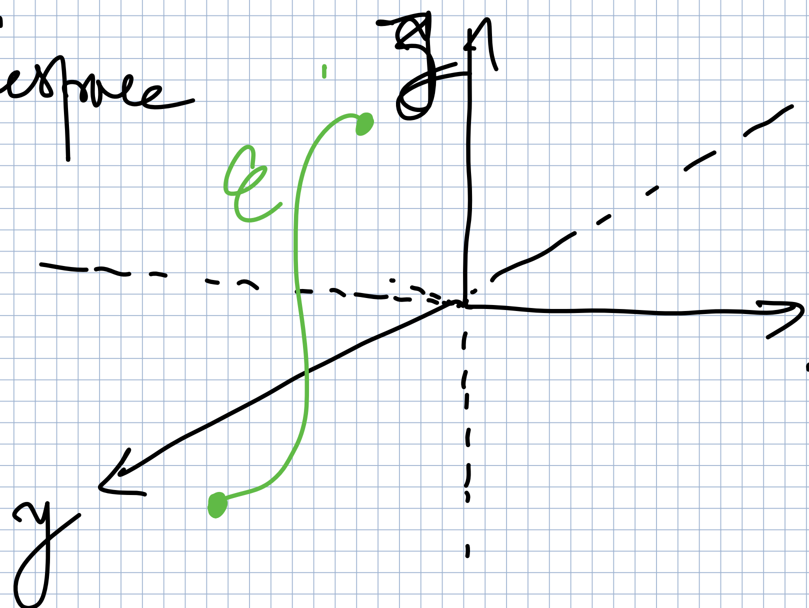


$$\mathcal{C} : M(x,y) = \Phi(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \text{avec } t_1 \leq t \leq t_2$$

t_1 : le point de départ

t_2 : ——— d'arrivée.

Dans l'espace



$\mathcal{C}: M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$

Le segment bleu se paramétrise par :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \text{ et } t \in [0,1].$$

La courbe rouge se paramétrise par :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1+\sin\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

En effet ; l'équation paramétrique d'un cercle du plan xOy ~~et~~ et de centre (x_0, y_0) ~~et~~ et de rayon R est donnée par

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dans l'exemple on a $x_0 =$ et $y_0 = 1$, $R = 1$.

avec $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

d'où $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \cos\theta \\ 1+\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

Rq : . $\mathcal{C} = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; \ y = g(x) \text{ et } x \in I \right\}$

Alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff \exists t \in I,$

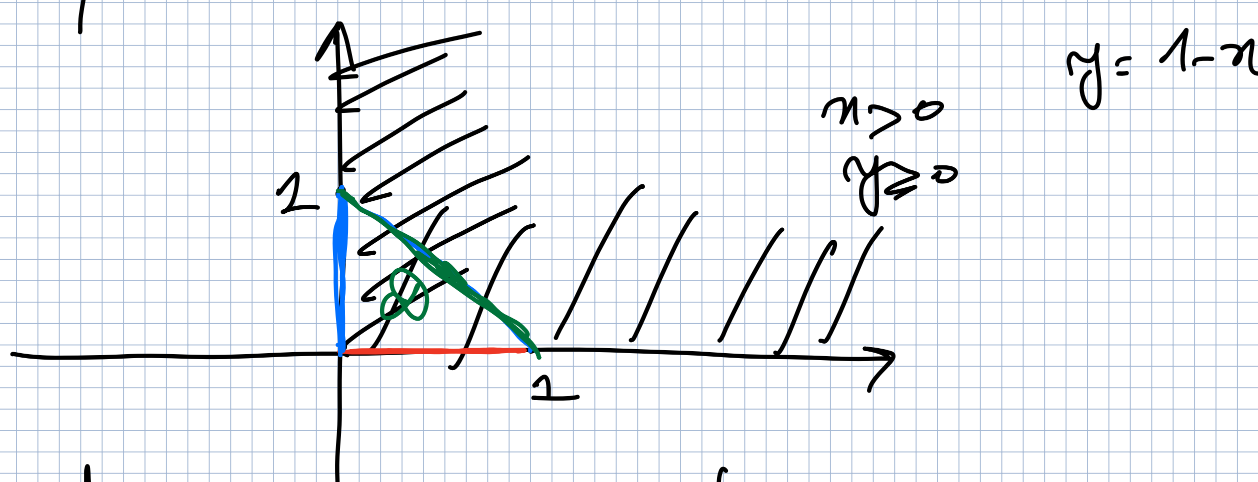
$$M = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$$

. $\mathcal{C} = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \ x^2 + y^2 = R^2 \right\}$ avec $R > 0$. donnée

Alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff \exists \theta \in [0, 2\pi[,$

$$M = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ y > 0 \ \ x + y < 1 \right\}$



Le segment rouge se paramétrise par :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1].$$

Le segment bleu se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \; ; \; t \in [0, 1]$$

Le segment vert se paramétrise par :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \text{ et } t \in [0, 1].$$

(4) $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 - x < 0 \\ x^2 + y^2 - y > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}$

on a $x^2 + y^2 - x < 0$

$\iff x^2 - \frac{1}{2} 2x + y^2 < 0$

$\iff x^2 - \frac{1}{2} 2x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < 0$

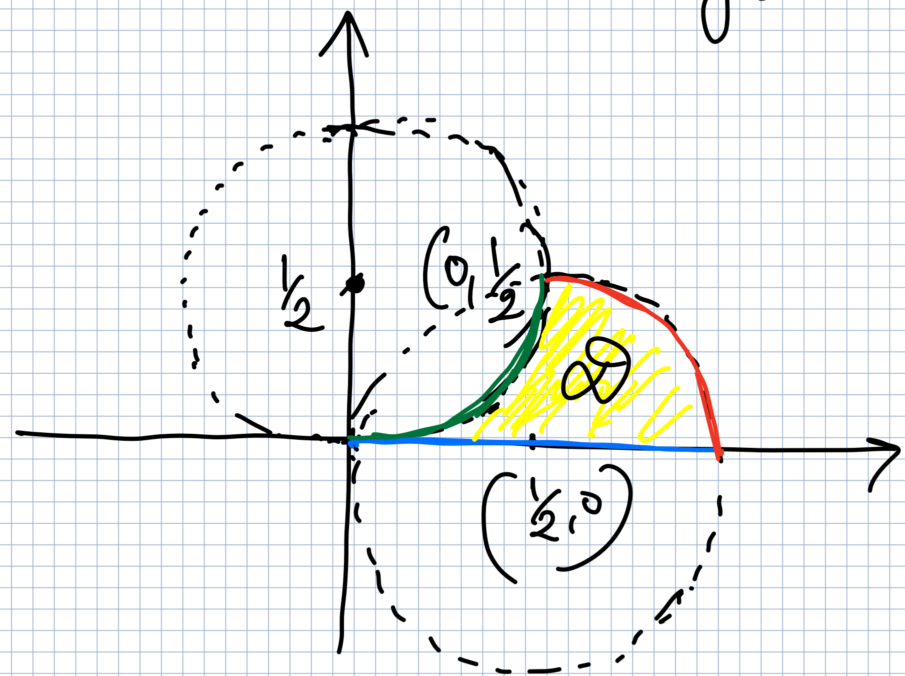
$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

et $x^2 + y^2 - y > 0$ $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

D'où

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq : } \begin{array}{l} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ y > 0 \end{array} \right\}$$



$$\mathcal{D} = \overline{D}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 0\right), 0{,}5\right) \cap \overline{D}^{c}\left(\left(0, \tfrac{1}{2}\right), 0{,}5\right) \cap \{ y > 0 \}$$

La courbe rouge se paramétrise par :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La courbe verte se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$

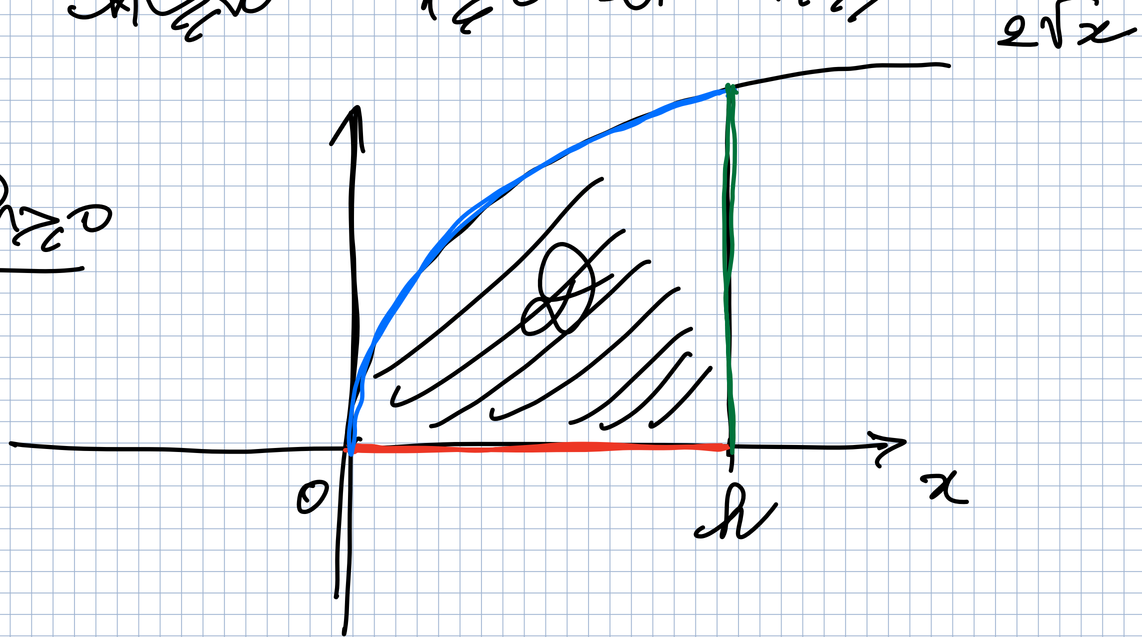
Le segment bleu se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } t \in [0,1].$$

(6) : $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x,\ y \geq 0,\ x \leq h \right\}$

Si ~~$h \geq 0$~~. $x \geq 0$ et $h \geq 0$.

soit $h \geq 0$



$y \geq 0$
$x \geq 0$ $\quad y^2 = 4x \iff y = 2\sqrt{x}$

Le segment rouge se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } t \in [0,h].$$

La courbe bleu se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\sqrt{t} \end{pmatrix} \quad t \in [0,h]$$

ou bien

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\sqrt{h}].$$

Le segment vert se paramétrise par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \text{ et } t \in [0, 2\sqrt{h}].$$

<u>Ex A.2.6:</u> (1), (2), (3) (Surfaces de $\mathbb{R}^3$).

(R) <u>Rappel:</u> Les quadratiques sont des surfaces définies par une équation polynomiale de degré 2.

- Une ellipsoïde de centre à l'origine d'axes dirigés ~~par~~ selon les directions (Ox), (Oy) et (Oz) a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \qquad a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\phi \\ y = b\sin\theta\sin\phi \\ z = c\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi],\quad \phi \in [0,2\pi]$$

(1) $x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1.$

si $\alpha > 0$ on a

$$x^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right)^2 + z^2 = 1.$$

C'est une ellipsoïde centrée à l'origine d'axes dirigés selon les directions (Ox), (Oy) et (Oz) et de demi axes de longueurs 1, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, 1 respectivement.

Une paramétrisation possible est

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\phi \\ y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\theta\sin\Phi \\ z = \cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi],\quad \phi \in [0,2\pi].$$

Si $\underbrace{\alpha = 0}$, on réécrit l'équation

$$x^2 + z^2 = 1.$$

Cela ressemble à l'équation d'un cylindre. La variable y n'apparaît pas. C'est un cylindre infini de révolution autour de l'axe (Oy), de rayon 1.

Rappel: Un cylindre elliptique infini centré à l'origine et d'axe (Oz) :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

$a > 0$, $b > 0$ longueurs de demi axes

$$\begin{pmatrix} x = a\cos\phi \\ y = b\sin\phi \\ z = z \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} ; \ \phi \in [0, 2\pi].$$

Une paramétrisation $(\underline{\alpha = 0})$

$$\begin{pmatrix} x = \cos\phi \\ y \\ z = \sin\phi \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R} ; \ \phi \in [0, 2\pi].$$

• Si $\underline{\alpha < 0}$;

$$x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{1/\alpha}}\right)^2 + z^2 = 1$$

Cela ressemble à une ~~hyper~~ hyperboloïde à une nappe avec cette fois un signe moins devant y^2. C'est une hyperboloïde à une nappe autour de l'axe (Oy).

Rappel : hyperboloïde à une nappe centrée à l'origine et d'axe (Oz)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}\,\cos\Phi \\ y = b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}\,\sin\Phi \\ z \end{cases}$$

$z \in \mathbb{R} \quad \Phi \in [0, 2\pi[$

Une paramétrisation possible est

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{\sqrt{-\frac{1}{\alpha}}}\right)^2}\cos\phi \\ y \\ z = \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{\sqrt{-\frac{1}{\alpha}}}\right)^2}\sin\phi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = \sqrt{1+(y\sqrt{-\alpha})^2}\cos\phi \\ z = \sqrt{1+(y\sqrt{-\alpha})^2}\sin\phi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = \sqrt{1-2y^2}\cos\phi \\ z = \sqrt{1-2y^2}\sin\phi \end{cases} ; \; y \in \mathbb{R}, \; \phi \in [0, 2\pi]$$

(2) $-2x^2+y^2+z^2=\alpha$.

si $\underline{\alpha > 0}$ on a $-\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)+\left(\dfrac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)+\left(\dfrac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = 1$.

C'est un ~~hyper~~ hyperboloïde à une nappe

de révolution autour de l'axe (Oz).
Une paramétrisation possible est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y = \sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2}\cos\phi \\ z = \sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2}\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y = \sqrt{\alpha+2x^2}\cos\phi \\ z = \sqrt{\alpha+2x^2}\sin\phi \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$ et $\phi \in [0, 2\pi[$.

• Si $\underline{\underline{\alpha = 0}}$ On réécrit l'équation :

$$x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$$

C'est un cône de révolution autour de l'axe (Ox). Une paramétrisation.
Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y = 2x \cos\phi \\ z = 2x \sin\phi \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}, \ \phi \in [0, 2\pi]$$

· <u>si $\alpha < 0$</u>

$$\left(\frac{x}{\sqrt{-\alpha/2}}\right) - \left(\frac{y}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = 1$$

C'est une hyperboloïde avec deux nappes de révolution autour de l'axe (Ox). Une paramétri

<u>Rappel :</u>

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x = a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1}\,\cos\phi \\ y = b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1}\,\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

$z \in]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[$

$\phi \in [0, 2\pi]$.

Une paramétrisation possible est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y = \sqrt{-\alpha}\sqrt{\left(x\sqrt{-\frac{2}{\alpha}}\right)^2 - 1}\cos\phi \\ z = \sqrt{-\alpha}\sqrt{\left(x\sqrt{-\frac{2}{\alpha}}\right)^2 - 1}\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y = \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\phi \\ z = \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$x \in \left]-\infty, -\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[$$

$$\phi \in [0, 2\pi[$$

(3) $x^2 + 2y + z^2 = 1$

Rappel : La paraboloïde elliptique centrée à l'origine de demi-axe supérieur $[Oz)$ a pour équation

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

où a et b sont deux constantes positives.

Une paramétrisation possible est

$$\left(\begin{array}{l} x = a\rho\cos\phi \\ y = b\rho\sin\phi \\ z = \rho^2 \end{array}\right) \quad \rho\in\mathbb{R}_+,\ \phi\in[0,2\pi].$$

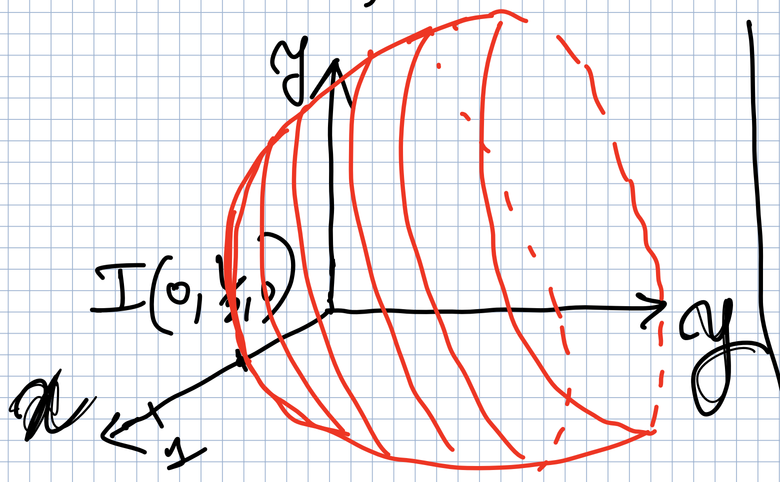
$\rho\in\mathbb{R}_+$, $\phi\in[0,2\pi]$.

On a $x^2+2y+z^2=1$

$\iff x^2+z^2 = 1-2y$, $y<\frac{1}{2}$

d'où $S: x^2+2y+z^2=1$ est une paraboloïde de centre $I(0,\frac{1}{2},0)$ et de ~~demi~~ demi axe inférieur $[Iy)$. Une paramétrisation possible est

$$\left(\begin{array}{l} x = \rho\cos\phi \\ y = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2 \\ z = \rho\sin\phi \end{array}\right) \quad \rho\in\mathbb{R}_+,\ \phi\in[0,2\pi].$$



$$\boxed{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2) \\ y=\frac{1}{2}(1-\rho^2) \end{array}}$$