MT22 M.2. Alaya

Chapitre 3 : Courbes et surfaces

Programme : Ex. A.2.7
Ex A.2.8

Ex A.2.7 : (Courbes de $\mathbb{R}^3$).

1) Le système $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$

caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe $[Oz)$ avec le plan horizontal d'équation $z=3$. Graphiquement on obtient un cercle C_1 :

Une paramétrisation de C_1 est :

$M(x,y,z) \in C_1 \Leftrightarrow \exists\, \theta \in [0,2\pi]$ /

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Le système $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

décrit l'intersection d'un cylindre

de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan oblique d'équation $x+y+z=1$. Graphiquement on obtient une courbe C_2.
Une paramétrisation de cette courbe est :

$$M(x,y,z) \in C_2 \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\,/$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1-\cos\theta-\sin\theta \end{pmatrix}$$

(3) le système $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan vertical $x+y=1$. Il suffit de résoudre ce système de deux équations à deux inconnus.
Graphiquement on obtient une courbe C_3 constituée de deux droites verticales d'équations $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ~~et~~ $\begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases}$

En effet,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=1-x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+(1-x)^2 = 1 \\ y = 1-x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Une paramétrisation de cette courbe est

$M(x,y,z) \in C_3 \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

(2) Le système $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+\frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases}$ décrit l'intersection d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) avec un cylindre elliptique centré en l'origine, d'axe (Oz) et demi-axes de longueurs $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

Graphiquement on obtient une courbe C_4.

on a $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 = 1 - \frac{1}{2} y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - \frac{1}{2} y^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2} y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{1}{2} y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2} y^2 = 1 \end{cases}$

Une paramétrisation de cette courbe est :

$M(x, y, z) \in C_4 \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sqrt{2} \sin\theta \\ 1 + \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Vecteur tangent à la droite tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_4$:

Rappel :

Proposition 3.3.1. *Soit C la courbe dont les équations paramétriques sont :*

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \text{, le vecteur } \vec{T} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \text{, s'il n'est pas nul, est tangent en } M_0 \text{ à la courbe } C.$$

Un vecteur tangent à la droite tangente T à la courbe C_4 au point $M(x_0 = x(\theta_0), y_0 = y(\theta_0) ; z_0 = z(\theta_0))$

est $\overrightarrow{T} = \Phi'(\theta_0) = \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 \\ \sqrt{2}\cos\theta_0 \\ 2\cos\theta_0 \sin\theta_0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} y_0 \\ \sqrt{2}\, x_0 \\ \sqrt{2}\, x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

La droite tangente $\mathcal{T}$ est la droite qui passe par M_0 et qui a pour vecteur directeur $\overrightarrow{T}$. Elle est donc paramétrée par :

$M(x,y,z) \in \mathcal{T} \iff \exists t \in \mathbb{R},$

$M = M_0 + t\, \Phi'(\theta_0)$

$\iff \exists t \in \mathbb{R},$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 - t\sin\theta_0 \\ \sqrt{2}(\sin\theta_0 + t\cos\theta_0) \\ 1 + \sin^2\theta + 2t\cos\theta_0\sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 - t\frac{y_0}{\sqrt{2}} \\ y_0 + t\sqrt{2}x_0 \\ z_0 + t\sqrt{2}x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

Exercice A-2-8 : Intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$

1) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ avec

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ M \begin{pmatrix} u+v+\frac{1}{3} \\ u-2v+\frac{1}{3} \\ -2u+v+\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u,v \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ M \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u,v \in \mathbb{R} \right\}$$

1). La surface $\mathcal{S}_1$ est un plan d'équation $x+y+z=1$.

La surface $\mathcal{S}_2$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) d'équation $z = x^2+y^2$

2) a) soit $M_2 \in \mathcal{S}_2$.

on cherche un vecteur normal $\vec{N}$ à $\mathcal{S}_2$ au point M_2.

1ère méthode : En utilisant l'équation implicite de $\mathcal{S}_2$:

D'abord, faisons le rappel suivant :

Théorème 3.5.2. *La surface S est caractérisée par une équation cartésienne implicite :*

$$f(x, y, z) = 0.$$

On suppose que f est différentiable en M_0. On note

$$\vec{N}_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right).$$

On suppose que $\vec{N}_0 \neq \vec{0}$, alors $\vec{N}_0$ est un vecteur normal à S en M_0, d'où l'équation du plan tangent à S en M_0 :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

D'après ce théorème, pour trouver un vecteur normal $\vec{N_2}$ à la surface $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0, y_0, z_0)$ on a

$\vec{N_2} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$

$= \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Autre choix $\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$ si on choisit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

2ème méthode : En utilisant la paramétrisation

Rappel :

La surface S est caractérisée par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2. \\ z = c(u,v) \end{cases}$$

On suppose que les fonctions a, b, c sont différentiables en (u_0, v_0), la surface est alors dite différentiable en M_0.

Théorème 3.5.1. *Si la surface S est différentiable en M_0, si les vecteurs*

$$\vec{T}_1(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \vec{T}_2(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial b}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial c}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires, il existe un plan Π tangent à S en M_0.
Ce plan contient M_0 et les vecteurs $\vec{T}_1(M_0), \vec{T}_2(M_0)$.

Si les composantes de $\vec{N} = \vec{T}_1(M_0) \wedge \vec{T}_2(M_0)$ sont (α, β, γ), l'équation de Π est

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Pour trouver un vecteur normal $\overrightarrow{N_2}$ à la surface S_2 au point $M_2(x_0, y_0, z_0) = M_2(x_0 = u_0 ; y_0 = v_0 ; z_0 = u_0^2 + v_0^2)$

On doit commencer par calculer les vecteurs tangents à la surface

$$\overrightarrow{T_1} = \frac{\partial \overrightarrow{OM_2}}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_0 \end{pmatrix}$$

et $$\overrightarrow{T_2} = \frac{\partial \overrightarrow{OM_2}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v_0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne s'annulent jamais et ne sont pas colinéaires. On a

$$\overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{T_1} \wedge \overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} -2u_0 \\ -2v_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rq : on remarque que l'on trouve le résultat précédent en repassant en coordonnées cartésiennes. Ce n'est pas toujours le cas, souvent on trouve un vecteur normal <u>différent</u> mais colinéaire au précedent.

- Une équation du plan tangent Π_2 à $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est donnée par la formule

$$M(x,y,z) \in \Pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{M_2M} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - z_0) = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(\cancel{y - y_0})$$

(b) On suppose que $M_2 \in \mathcal{S}_1$.

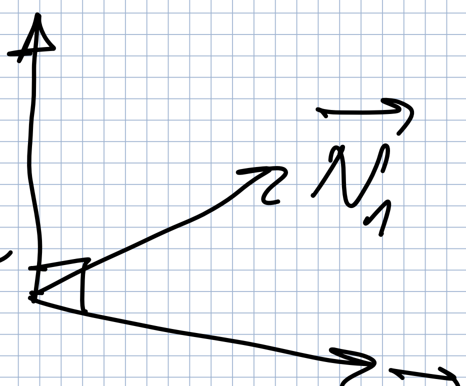
On a $M_2 \in \mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Soit Π_1 le plan tangent à la surface $\mathcal{S}_1$ au point M_2.

- Un vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2 appartient à l'intersection des deux plans tangents Π_1 et Π_2 (déterminé dans la question 1°) a))

C'est à dire le vecteur tangent est orthogonal aux deux vecteurs normaux au plan Π_1 et Π_2.

D'où $\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$

$$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$



et tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2.

Calcul de $\vec{T}$:

- on a déjà déterminé $\vec{N_2}$.
- $\vec{N_1} = ?$

Rappel:

Rappelons l'équation cartésienne de quelques surfaces connues :

– Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan dont un vecteur normal est
vecteur $\vec{N} = (a,b,c)$

– le plan tangent en tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au Plan (P) : $ax+by+cz=d$ est défini par l'équation :

$$\Pi : a(x-x_0) + b(x-x_0) + c(x-x_0) = 0$$

et un vecteur normal $\vec{N_0} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On en déduit que $\vec{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à Π_1.

- On applique la formule pour trouver $\vec{T}$

$$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2x_0 \\ -2x_0 - 1 \\ 2x_0 - 2y_0 \end{pmatrix}$$

- L'équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est caractérisée par :

$M(x, y, z) \in \mathcal{T} \iff \exists t \in \mathbb{R},$

$M = M_2 + t\vec{T}$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t(1+2x_0) \\ y_0 \quad t(1+2x_0) \\ z_0 + 2t(x_0 - y_0) \end{pmatrix}$$

3) On reprend les équations implicites des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On a

$M(x,y,z) \in \mathcal{C}$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ 1-x-y = x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 & (Eq\,1) \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} & (Eq\,1) \end{cases}$$

(Eq 1) définit un plan qui est la surface.

(Eq 2) définit un cylindre de révolution autour de l'axe parallèle à (Oz) et passant le point de coordonnés $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Paramétrisation de $\mathcal{C}$:

On peut paramétrer la courbe $\mathcal{C}$ en s'inspirant de la paramétrisation d'un cylindre.

$M(x,y,z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists\, \theta \in [0, 2\pi]$ /

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta \\ z = 1 - x - y = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) \end{cases}$$

• Un vecteur tangent $\vec{T}'$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est obtenu en dérivant chaque coordonnée par rapport à θ.

On obtient

$$\vec{T}' = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} (\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y_0 - \frac{1}{2} \\ x_0 + \frac{1}{2} \\ y_0 - x_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{T}.$$