TD N°9 MT22 M. Z. Alaya

Ex A.2.2

(2) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \left(1+\sqrt{2y-y^2}\right) dx\, dy$

avec $\mathcal{D} = [0,2] \times [0,1]$

- Tout d'abord, on peut remarquer que le volume ici est délimité par le domaine $\mathcal{D}$ du plan $z=0$ et la surface

$$z = 1+\sqrt{2y-y^2}$$
$$= 1+\sqrt{(2y-y^2-1)+1}$$
$$= 1+\sqrt{1-(y^2-2y+1)}$$
$$= 1+\sqrt{1-(y-1)^2}$$

Cette dernière représente la partie supérieure du cylindre d'axe $(y=1, z=1)$ et de rayon 1. En effet, on réécrit son équation

$$z = 1+\sqrt{1-(y-1)^2}$$

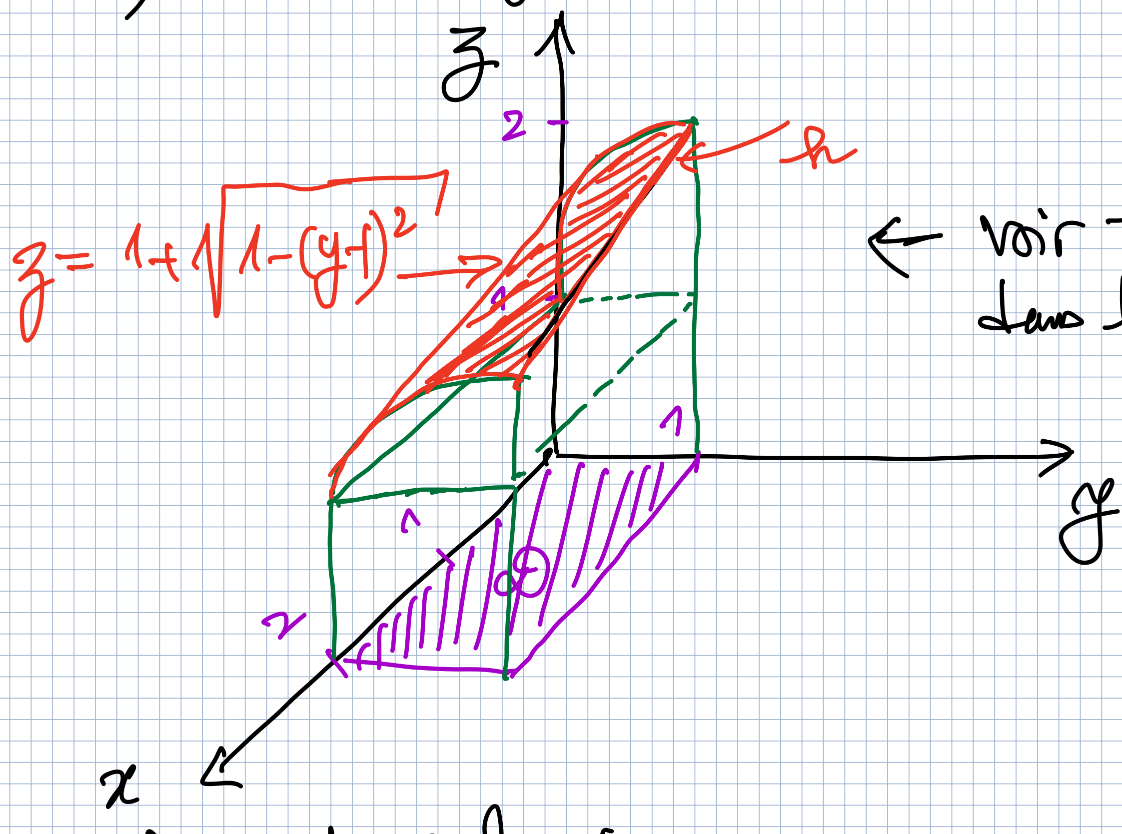
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-(y-1)^2} = z-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-(y-1)^2 = (z-1)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-(y-1)^2 = (z-1)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (z-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

d'où l'equation d'un cylindre d'axe $(y=1,\ z=1)$ (cet axe est parallèle à l'axe (Ox)) et de rayon 1.



← voir figure dans le fichier HTML

Le volume est égale à

$$\frac{\text{Volume du cylindre}}{4} + \text{Volume parallélépipède}$$

$$= \frac{\pi \times 1^2 \times h}{4} + 2 = \frac{\pi \times 2}{4} + 2 = \frac{\pi}{2} + 2$$

Maintenant on va recalculer le volume à partir de l'intégrale double. En effet,

$$V = \iint_{\mathcal{D}} 1 + \sqrt{1-(y-1)^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy + \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1-(y-1)^2}\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_0^2 dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) + \left(\int_0^2 dx\right)\left(\int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy\right)$$

$$= 2 + 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy$$

On considère le changement de variable

$y-1 = \sin(t)$ on a

$dy = \cos(t)\, dt$ et

si $y = 0 \Rightarrow t = -\pi/2$

et $y = 1 \Rightarrow t = 0$. Alors

$$V = 2 + 2 \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy$$

$$= 2 + 2 \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{1-(\sin t)^2}\, \cos(t)\, dt$$

$$= 2 + 2 \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{(\cos t)^2} \cos t \, dt$$

$$= 2 + 2 \int_{-\pi/2}^{0} |\cos t| \cos t \, dt$$

or la fonction $t \mapsto \cos t$ est positive sur $[-\pi/2, 0]$ donc

$$V = 2 + 2 \int_{-\pi/2}^{0} \cos^2 t \, dt$$

$$= 2 + 2 \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \, dt$$

$\left(\cos_2 \quad 2\cos^2(t) = 1 + \cos(2t) \right)$

$$= 2 + \int_{-\pi/2}^{0} (1 + \cos(2t)) \, dt$$

$$= 2 + \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{0}$$

$$= 2 + \frac{\pi}{2}$$

Ex A. 2.5

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy \; ; \; \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ \text{et } x^2+y^2=9 \end{array} \right\}$$

En utilisant le système de coordonnées polaires

$$(x,y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

avec $r \in [2,3]$

et $\theta \in [0, 2\pi]$

Le jacobien associé à ce changement de variable est

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)$$

$$= r$$

On obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{[2,3]\times[0,2\pi]} r \times r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_2^3 r^2\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 \times 2\pi = \frac{38}{3}\pi$$