Exercice A-2.2 :

2) $(\mathbb{R}^2, \hat{+}, \cdot)$ est-il un espace vectoriel avec

$\hat{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ (loi interne)

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto (x_1, x_2) \hat{+} (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

loi externe définie par (ii) :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$$

- C'est très simple de vérifier que $(\mathbb{R}^2, \hat{+})$ est un groupe commutatif :

- associativité de $\hat{+}$:
  $\forall \vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, $\vec{z} = (z_1, z_2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, vérifions que
  $$(\vec{x} \hat{+} \vec{y}) \hat{+} \vec{z} = \vec{x} \hat{+} (\vec{y} \hat{+} \vec{z})$$
- élément neutre c'est $\vec{0} = (0, 0)$
  $\forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \hat{+} \vec{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = \vec{x}$
- élément symétrique :
  $\forall \vec{x}$, on a $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
  avec $-\vec{x} = (-x_1, -x_2)$
- Commutativité :
  on a $\forall \vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$
  on a $\vec{x} \hat{+} \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$= (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

$= (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$

$= \vec{y} + \vec{x}.$

<u>Propriété pour la loi externe :</u>

on vérifie la propriété (3) : distribution de la loi externe par rapport à la loi interne.

soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

on a $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2)$

$= ((\lambda + \mu) x_1, x_2)$ (par définition (ii'))

d'autre part,

$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2) + \mu \cdot (x_1, x_2)$

$= (\lambda x_1, x_2) + (\mu x_1, x_2)$

$= ((\lambda + \mu) x_1, 2 x_2)$

Donc si $x_2 \neq 0$ ~~on~~ la propriété

$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$, n'est nulle part vérifiée.

Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un espace vectoriel.