4) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$

F_4 n'est pas un sous espace vectoriel car il n'est pas stable par la loi externe. En effet si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ négatif c'est à dire $\alpha \leq 0$ on a

$\alpha\vec{x} \notin F$ car $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

et $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3$

$= \underset{\leq 0}{\alpha}\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\geq 0}$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$ car $\vec{x} \in F$

≤ 0

on a donc $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 \leq 0$

$\Rightarrow \alpha\vec{x} \notin F$.

5) $F_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| = |x_2|\}$

F_5 n'est pas un sous espace vectoriel.

Prenons $\vec{x} = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$

et $\vec{x'} = (1, -1, 0)$

on a $\vec{x} \in F$ car $(|1| = |1|)$

et $\vec{x'} \in F$ car $(|1| = |-1|)$

Mais $\vec{x} + \vec{x'} = (1, 1, 0) + (1, -1, 0)$

$= (2, 0, 0)$

et $|2| = 2 \neq |0| = 0$

Ainsi $\vec{x} + \vec{x}' \notin F$.

6) $F_6 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0 \}$

F_6 n'est pas un sev car si

$\vec{x} = (0, 1, 1) \in F_6 \quad (0 \times 1 \times 1 = 0)$

$\vec{x}' = (1, 0, 1) \in F_6 \quad (1 \times 0 \times 1 = 0)$

Mais $\vec{x} + \vec{x}' = (0, 1, 1) + (1, 0, 1)$

$= (1, 1, 2) \notin F_6$

car $(1 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0)$

7) $F_7 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \}$

F_7 est bien un sous espace vectoriel.

si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in F_7$ et $\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3') \in F_6$

on a $\vec{x} + \vec{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$

Vérifions que $x_1 + x_1' = x_2 + x_2' = x_3 + x_3'$.

On a $x_1 = x_2 \quad (\vec{x} \in F \equiv x_1 = x_2 = x_3)$

$\Leftrightarrow x_1 + x_1' = x_2 + x_1'$ or $x_1' = x_2' \; (\vec{x}' \in F)$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_1' = x_2 + x_2'} \; (*)$

De même $x_2 = x_3$

et comme $x_2 = x_3$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 + x_2' = x_3 + x_2'$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 + x_2' = x_3 + x_3'} \quad (x_2' = x_3') \quad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow x_1 + x_1' = x_2 + x_2' = x_3 + x_3'$$