MT23 - Algèbre linéaire

Chapitre 1 - Espaces vectoriels (Partie 2)

Mokhtar Z. Alaya

http://mzalaya.github.io/files/teaching/UTSEUS/MT23/chap1-semaine2.pdf

Université de Shanghai, UTSEUS, 2 septembre 2024

1.1.3 Sous-espaces vectoriels

Dans la suite, nous considérons $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur un corps K.

Proposition 1.1.4

F est uns sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $F \neq \varnothing$ et,
- $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \forall \lambda, \mu \in K \Longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F.$

Proposition 1.1.5

- E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ appartient à tous les espaces vectoriels.

Démonstration (Proposition 1.1.5) : à faire dans l'exercice A.1.5.

Proposition 1.1.6

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels alors :

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.
2. $F \cup G$ n'est toujours pas un sous-espace vectoriel.

1.1.3 Sous-espaces vectoriels

Démonstration (Proposition 1.1.6) :

1.

- On a $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$ donc $\vec{0} \in F \cap G \Longrightarrow F \cap G \neq \varnothing$.
- soient $\vec{x}, \vec{y} \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in K$ alors : $\vec{x} \in F$ et $\vec{x} \in G$
$\Longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in F$ et $\lambda \cdot \vec{x} \in G$

De même (similarly) on montre que $\mu \cdot \vec{y} \in F$ et $\mu \cdot \vec{y} \in G$. On arrive à

$$\begin{cases} \lambda \cdot \vec{x} \in F \\ \mu \cdot \vec{y} \in F \end{cases} \Longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F, \qquad \begin{cases} \lambda \cdot \vec{x} \in G \\ \mu \cdot \vec{y} \in G \end{cases} \Longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in G$$

Alors $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

2. Contre exemple : il existe F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $K = \mathbb{R}$ muni des lois habituelles $+$ et . On définit :

$F = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$.

- F et G sont des sous-espaces vectoriels (facile à démontrer).

1.1.3 Sous-espaces vectoriels

- Si on choisit $\vec{y} = (1, 0)$ et $\vec{z} = (0, 1)$ on :
  $\vec{y} \in F \Longrightarrow \vec{y} \in F \cup G$ et $\vec{z} \in G \Longrightarrow \vec{z} \in F \cup G$. Mais, le vecteur $\vec{y} + \vec{z} = (1, 1) \notin F \cup G$. Ainsi $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel. ■

Remarque
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel $\Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.
(À faire dans l'exercice A.2.5)

1.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F + G$ défini par :

$$\vec{x} \in F + G \Longleftrightarrow \exists \vec{y} \in F, \exists \vec{z} \in G \text{ tel que } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

1.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Proposition 1.1.7
$F + G$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration (Proposition 1.1.7) : à faire dans l'exercice A.2.6.

Définition :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en somme direct si $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On note $F \oplus G$.

On a donc :
$$H = F \oplus G \iff H = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

1.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Remarque

Il n' y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné.

Exemple :

Proposition 1.1.8

$H = F \oplus G \iff \forall \vec{x} \in H, \exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G \text{ tels que } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Corollaire :

Si $E = F \oplus G$ alors quelque soit $\vec{x} \in E$ il existe un unique $\vec{y} \in F$ et un unique $\vec{z} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Démonstration (Proposition 1.1.8) :

- " $\Longrightarrow$ "

Soit $H = F \oplus G \iff H = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}.$

$$\Longrightarrow H = F + G.$$

$$\Longrightarrow \forall \vec{x} \in H, \exists \vec{y} \in F, \exists \vec{z} \in G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

1.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Maintenant, on montre l'unicité de $\vec{y}$ et $\vec{z}$. On suppose qu'il existe une autre décomposition $\vec{x} = \vec{y'} + \vec{z'}$. Alors,

$$\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} = (\vec{y} - \vec{y'}) - (\vec{z} - \vec{z'})$$

$\Longleftrightarrow \vec{y} - \vec{y'} = \vec{z'} - \vec{z}$.

Or $\vec{y} - \vec{y'} \in F$ et $\vec{z'} - \vec{z} \in G \Longrightarrow \vec{y} - \vec{y'} \in F \cap G$ et $\vec{z} - \vec{z'} \in F \cap G$.

Mais $F \cap G = \{\vec{0}\}$, ce qui implique $\vec{y} - \vec{y'} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{y} = \vec{y'}$ et $\vec{z'} - \vec{z} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{z} = \vec{z'}$.

- "$\Longleftarrow$" (Réciproque). On suppose

$$\forall \vec{x} \in H, \exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G \text{ tels que } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

$$\Longrightarrow \forall \vec{x} \in H, \exists \vec{y} \in F, \exists \vec{z} \in G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

$$\Longrightarrow H = F + G.$$

<u>Il reste à montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.</u>

Soit $\vec{x} \in F \cap G$ alors on écrit :

1.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Soit $\vec{x} \in F \cap G$ alors on écrit :

$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \text{ avec } \vec{x} \in F \text{ et } \vec{0} \in G$$

et $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x}$ avec $\vec{0} \in F$ et $\vec{x} \in G$, c'est à dire

$$\underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} = \vec{x} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{x}}_{\in G}$$

Or par unicité de la décomposition (existence et unicité), on obtient $\vec{x} = \vec{0}$. ■

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1.2.1 Familles liées, familles libres

Définition (famille liée (dependent sequence))

On dit que la famille $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs de E est liée s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ non tous nuls (non all zero) tels que

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

1.2.1 Familles liées-libres

Remarques

1. Si une famille est liée, alors toute famille obtenue en modifiant l'ordre des vecteurs est liée.
2. Si $p = 1$, la famille $S = \{\vec{x}_1\}$ est liée $\Longleftrightarrow$ $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$.
3. Si $p \geq 2$, la famille $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est liée $\Longleftrightarrow$ $\exists \vec{x}_j, \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_p,$ tels que $\vec{x}_j = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_{j-1} \vec{x}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{x}_{j+1} + \cdots + \alpha_p \vec{x}_p.$

<u>Définition</u> (famille libre (independent sequence))

On dit que la famille $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs de E est libre si elle n'est pas liée. On dit aussi que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas on a :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K, \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

1.2.1 Familles liées-libres

Remarques

1. $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est liée

$$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K, \left\{ \exists i, \lambda_i \neq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{x}_j = \vec{0} \right\}.$$

2. $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est non liée

$$\iff \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K, \left\{ \forall i, \lambda_i = 0 \text{ ou } \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{x}_j \neq \vec{0} \right\}.$$

$$\iff \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K, \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{x}_j = \vec{0} \Longrightarrow \forall i, \lambda_i = 0 \right\}.$$

$\iff S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est libre.

1.2.1 Familles liées-libres

Propositions 1.2.1 et 1.2.2

1. Deux vecteurs sont égaux dans une famille $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ alors elle est liée.
2. Toute famille contenant le vecteur $\vec{0}$ est liée.
3. Si $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est liée alors la famille $\{S, \vec{x}\}$ est liée pour tout vecteur quelconque $\vec{x}$.
4. Si $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est libre alors la famille $S' = \{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est libre.

Démonstration (Propositions 1.2.1 et 1.2.2) : Voir l'exercice A.1.11.

Propositions 1.2.3

Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ est une famille libre et si $\vec{x}$ est un vecteur tel que la famille $\mathcal{E} \cup \{\vec{x}\}$ est liée alors $\vec{x}$ est une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$.

1.2.1 Familles liées-libres

<u>Démonstration (Proposition 1.2.3)</u>

On a $\mathcal{E} \cup \{\vec{x}\}$ est liée

$\Longrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$, non tous nuls tels que

$\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{e}_p + \alpha_{p+1}\vec{x} = \vec{0}$. Supposons $\alpha_{p+1} = 0$ alors la famille $\mathcal{E}$ est liée, ce qui absurde, donc $\alpha_{p+1} \neq 0$. Ainsi on peut diviser par α_{p+1}.

<u>Propositions 1.2.4</u>

Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ est une famille libre et si $\vec{x}$ admet une décomposition de la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p$, alors les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont uniques.

<u>Démonstration (Proposition 1.2.4)</u> : (faite au tableau)

1.2.1 Familles génératrices

Définition (famille génératrice)

On dit que la famille (finie) $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ est génératrice si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \in E$ et

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in K, \vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{x}_j.$$

Définition (espace vectoriel de type fini)

On dit qu'un espace vectoriel E est de type fini s'il existe une famille génératrice de E contenant un nombre fini de vecteurs.

Propositions 1.2.5

Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ est une famille génératrice et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque alors la famille $\mathcal{E} \cup \{\vec{x}\}$ est génératrice.

Démonstration (Proposition 1.2.4) : (À faire en exercice).

1.2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

<u>Définition</u> (sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un espace vectoriel sur K et soit $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On appelle <u>sous-espace vectoriel engendré par la famille</u> $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ et on note $\mathrm{vect} < \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n >$ l'espace vectoriel défini par

$$\vec{x} \in \mathrm{vect} < \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n > \Longleftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Remarques

1. Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ alors $D = \mathrm{vect} < \vec{e} >$ s'appelle une <u>droite vectorielle</u>.
2. Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ et $\vec{f} \neq \vec{0}$ alors $P = \mathrm{vect} < \vec{e}, \vec{f} >$ s'appelle un <u>plan vectoriel</u>.

1.2.4 Bases

Définition (base)
Une famille qui est libre et génératrice de E est appelée base de E.

Exemple
1. $E = \mathbb{R}^n$ et $K = \mathbb{R}$: base canonique

Propositions 1.2.6
Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de E si et seulement si pour tout $\vec{x}$ un vecteur quelconque de E il existe des scalaires uniques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$$

Démonstration (Proposition 1.2.6) : (faite au tableau)

Remarque
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les composantes ou coordonnées de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$.

1.2.4 Bases

TD 2 (Homeworks):

- Exercice A.2.8
- Exercice A.2.9 (Questions 1 et 2)
- Exercice A.2.10 (Question 1)
- Exercice A.2.12