MT23 - Algèbre linéaire

Chapitre 1 - Espaces vectoriels (Partie 3)

Mokhtar Z. Alaya

http://mzalaya.github.io/files/teaching/UTSEUS/MT23/chap1-part3.pdf

Université de Shanghai, UTSEUS, 9 septembre 2024

Consignes

1. Chaque séance de TD, on vérifie la présence.
2. Absence(s) non justifiée(s) seront pénalisées.

3. Évaluation de cours : un <u>seul examen</u>

1.2.1 Familles génératrices

Définition (famille génératrice)
On dit que la famille (finie) $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est génératrice si $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \in E$ et

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K, \vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{x}_j.$$

Définition (espace vectoriel de type fini)
On dit qu'un espace vectoriel E est de type fini s'il existe une famille génératrice de E contenant un nombre fini de vecteurs.

Propositions 1.2.5
Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ est une famille génératrice et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque alors la famille $\mathcal{E} \cup \{\vec{x}\}$ est génératrice.

Démonstration (Proposition 1.2.4) : (À faire en exercice).

1.2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition (sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un espace vectoriel sur K et soit $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ et on note $\mathrm{vect} < \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n >$ l'espace vectoriel défini par

$$\vec{x} \in \mathrm{vect} < \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n > \Longleftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Remarques

1. Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ alors $D = \mathrm{vect} < \vec{e} >$ s'appelle une droite vectorielle.
2. Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ et $\vec{f} \neq \vec{0}$ alors $P = \mathrm{vect} < \vec{e}, \vec{f} >$ s'appelle un plan vectoriel.

1.2.4 Bases

Définition (base)
Une famille qui est libre et génératrice de E est appelée base de E.

Exemple
1. $E = \mathbb{R}^n$ et $K = \mathbb{R}$: base canonique

Proposition 1.2.6
Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de E si et seulement si pour tout $\vec{x}$ un vecteur quelconque de E il existe des scalaires uniques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i .$$

Remarque
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les composantes ou coordonnées de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$.

1.2.4 Bases

Démonstration (Proposition 1.2.6) :

"$\Longrightarrow$" On montre l'implication directe

Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base.

$\Longrightarrow \mathcal{E}$ est génératrice de E.

$\Longrightarrow \forall \vec{x} \in E$, il existe ($\exists$) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (scalaires), tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$.

Or $\mathcal{E}$ est libre $\Longrightarrow$ la décomposition précédente est unique (voir Proposition 1.2.4).

"$\Longleftarrow$" On montre le sens réciproque

Si pour tout $\vec{x} \in E$ il existe des scalaires uniques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$

$\Longrightarrow$ la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de E.

Il nous reste à montrer que $\mathcal{E}$ est libre. On doit donc montrer :

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Rappelons

- d'une part le vecteur nul $\vec{0}$ vérifie (voir début du chapitre 1)

$$\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \cdots 0\vec{e}_n$$

- d'autre part

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n.$$

Mais par unicité de la décomposition (voir Proposition 1.2.4) on $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$

1.2.5 Existence de bases

Théorème 1.2.1 : E est un espace vectoriel. Si

- $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n\}$ famille génératrice de E
- $\mathcal{E}$ famille libre telle que $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$,

alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Théorème 1.2.2 : Tout un espace vectoriel de type fini, différent de $\{\vec{0}\}$, possède une base.

Théorème 1.2.3 (Théorème de la base incomplète) : Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q\}$ est une famille libre de E alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui vérifie $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$.

1.2.5 Dimension d'un espace vectoriel

<u>Définition</u> (dimension)

Si E est un espace vectoriel de type fini, différent de $\{\vec{0}\}$, on appelle <u>dimension</u> de E, et on note $\dim E$, le nombre d'éléments d'une base quelconque de E

<u>Remarques</u>

1. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
2. $\dim\{\vec{0}\} = 0.$
3. $\{\vec{0}\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.

<u>Proposition 1.2.7</u> : E est un espace vectoriel de dimension $n (n > 0)$, $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$ famille quelconque de p vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre et $p = n$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice et $p = n$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
3. Si $p > n$ alors $\mathcal{F}$ est liée.
4. Si $p < n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E.

Démonstration (Proposition 1.2.7) :

1. $\mathcal{F}$ est libre donc d'après Théorème de la base incomplète (Théorème 1.2.3) il existe $\mathcal{B}$ base telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Or $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.

2. On a $n > 0$ donc il existe au moins un vecteur $\vec{f}$ de $\mathcal{F}$ tel que $\vec{f} \neq \vec{0}$. Donc la famille $\mathcal{L} = \{\vec{f}\}$ est libre et $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Théorème 1.2.1 implique l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Or $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.

3. Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Théorème de la base incomplète (Théorème 1.2.3) implique l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Donc la base $\mathcal{B}$ contient $m = \mathrm{card}(\mathcal{B})$ vecteurs avec $n < p \leq m$. Ceci est impossible puisque $\dim E = n$.

4. On a $n > 0$ donc il existe au moins un vecteur $\vec{f}$ de la famille génératrice $\mathcal{F}$ tel que $\vec{f} \neq \vec{0}$. Donc la famille $\mathcal{L} = \{\vec{f}\}$ est libre et $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Théorème 1.2.1 implique l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Donc la base $\mathcal{B}$ contient $m = \mathrm{card}(\mathcal{B})$ vecteurs avec $m \leq p < n$. Ceci est impossible puisque $\dim E = n$.

Corollaire 1.2.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Si E contient une famille libre de p vecteurs alors $\dim E \geq p$.
2. Si E contient une famille génératrice de q vecteurs alors alors $\dim E \leq q$.

Proposition 1.2.8 : E est un espace vectoriel de dimension $n(n > 0)$, si F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors

1. $\dim F \leq \dim E$.
2. $\dim F = \dim E \iff F = E$.
3. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
4. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
5. $E = F \oplus G \iff \dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$.
6. $E = F \oplus G \iff \dim F + \dim G = \dim E \text{ et } E = F + G$.

<u>Démonstration (Proposition 1.2.8)</u> :

1. Si $\mathcal{B}$ est une base de F, alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E. On peut la compléter pour obtenir une base de E, donc $\dim F \leq \dim E$.

2. Il suffit de montrer que E est inclu dans F. Soit $n = \dim E = \dim F$. Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ une base de F, cette famille est libre dans E, de n vecteurs dans E donc c'est une base de E (voir Proposition 1.2.7). Ainsi tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{f}_i$ avec des scalaires α_i et ainsi $\vec{x} \in F$.

3. Voir Document C.1.5.

4. Si F et G sont en somme directe, alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et donc $\dim F \cap G = 0$, on obtient

5. D'après le résultat 4,

$$E = F \oplus G \Longrightarrow \dim E = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

Réciproquement, si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et F et G sont en somme directe alors $F \oplus G \subset E$. Or d'après le résultat 4, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = \dim E$ et donc d'après le résultat 2, on a $E = F \oplus G$.

1.2.5 Dimension d'un espace vectoriel

6. On a
$$E = F \oplus G \Longrightarrow \dim E = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G \text{ et } E = F + G.$$

Réciproquement, $\dim E = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G \text{ et } E = F + G$

$\Longrightarrow \dim(F \cap G) = 0$

$\Longleftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$. Puis on utilise la réciproque du résultat 5.

TD 3 (Homeworks):

- Exercice A.2.12 (page 32)
- Exercise A.2.16 (page 33)
- Exercice A.2.19 (page 34)