MT23 - Algèbre linéaire

Chapitre 2 - Applications linéaires et matrices (Partie 1)

Mokhtar Z. Alaya

http://mzalaya.github.io/files/teaching/UTSEUS/MT23/chap2-part1.pdf

Université de Shanghai, UTSEUS, 14 septembre 2024

2.1.1 Applications linéaires - définition

Dans tout ce chapitre E, F et G désignent des espaces avec vectoriels de dimension finis sur un même corps K.

<u>Définition</u> (application linéaire)
On appelle <u>application linéaire</u> $u : E \to F$, une application de E dans F possédant les propriétés suivantes :

- $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E,$
- $u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})), \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in K$.

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

<u>Remarque</u>

- L'application <u>nulle</u> $\mathbf{0} : E \to F$ telle que $\mathbf{0}(\vec{x}) = \vec{0}_F, \forall \vec{x} \in E$ est linéaire.
- Pour toute $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est une espace vectoriel appelé espace vectoriel des applications linéaires E dans F de tel que :
  - $\forall u, v \in \mathscr{L}(E,F), (u+v)(\vec{x}) = u(\vec{x}) + v(\vec{x}), \forall \vec{x} \in E$
  - $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \forall \lambda \in K, (\lambda u)(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \forall \vec{x} \in E$

2.1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$,

- on appelle noyau de u, et on note $\mathrm{Ker}\ u$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\mathrm{Ker}\ u = \{\vec{x} \in E | u(\vec{x}) = \vec{0}_F\}.$$

- on appelle image de u, et on note $\mathrm{Im}\ u$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\mathrm{Im}\ u = \{\vec{y} \in F | \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = u(\vec{x})\}$$

Exemple :

Proposition 2.1.1

1. $\mathrm{Ker}\ u$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}\ u$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration:

1. Faire en exercice (simple).
2. On montre que $\mathrm{Im}\ u$ est un sous-espace vectoriel (sev) de F. On a $\vec{0}_F = u(\vec{0}_E)$ alors $\vec{0}_F \in \mathrm{Im}\ u$ et donc $\mathrm{Im}\ u \neq \varnothing$. Maintenant si $\vec{y}, \vec{y'} \in \mathrm{Im}\ u$ et

alors il existe $\vec{x}, \vec{x'} \in E$ tels que

$$\begin{aligned}\lambda\vec{y} + \mu\vec{y'} &= \lambda u(\vec{x}) + \mu u(\vec{x}') \\ &= u(\lambda\vec{x}) + u(\mu\vec{x}') \\ &= u(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}')\end{aligned}.$$

Donc le vecteur $\lambda\vec{y} + \mu\vec{y'} \in \mathrm{Im}\ u$. Ce qui termine la démonstration.

2.1.3 Image d'une famille liée, image d'une famille génératrice par $u \in \mathscr{L}(E, F)$

Théorème 2.1.1 Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$,

1. Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ est une famille liée de E alors $\mathcal{F} = \{u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_p)\}$ est une famille liée de F.
2. Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ est une famille génératrice de E alors $\mathcal{F} = \{u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_p)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\ u$.

Démonstration : faire en exercice.

2.1.4 Projection

Définition (projection)
Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, tout vecteur $\vec{x} \in E$ peut donc s'écrire $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$. On appelle projection (ou projecteur), sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par : $u(\vec{x}) = \vec{x}_1$.

Proposition 2.1.2
La projection sur F_1 parallèlement à F_2 est une application linéaire dont le noyau est F_2 et l'image est F_1.

Démonstration : faire en exercice.

2.1.5 Composition de deux applications linéaires

Soient $v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $u \in \mathscr{L}(F, G)$ deux applications linéaires, on rappelle la définition de la composée de u et v, notée $u \circ v$, telle que : $\forall \vec{x} \in E, u \circ v(\vec{x}) = u(v(\vec{x}))$

Proposition 2.1.2
Si $v \in \mathscr{L}(E,F)$ et $u \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $u \circ v \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration : faire en exercice.

2.1.6 Application linéaire entre espaces de dimension finie

Dorénavant, les espaces vectoriels utilisés sont de dimension finie.

Proposition 2.1.4
Soient $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, le vecteur $u(\vec{x})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\{u(\vec{e}_i)\}_{i=1,\ldots,n}$.

Démonstration : Soit $\vec{x} \in E$ alors $\exists!\, x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. Alors

$$u(\vec{x}) = u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i).$$

Proposition 2.1.5

E et F deux espaces vectoriels. Soient $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, respectivement $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$, une base de E (respectivement base de F). Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ chacun des vecteurs $u(\vec{e}_i)$ a des composantes dans la base $\mathcal{F}$. On peut noter ces composantes

$$u(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_j$$

Quelque soit $\vec{x} \in E$, on connait les composantes sur la base $\mathcal{E}$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.
Alors les composantes de

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{f}_j$$

avec $\beta_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$.

Démonstration : Il suffit juste utiliser la linéarité de $u \in \mathscr{L}(E,F)$,

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\Big)}_{\beta_j} \vec{f}_j. \end{aligned}$$

2.1.7 Caractérisation de injective

On rappelle qu'une application $f : A \to B$ est injective si :
$\forall x, x' \in A, \text{tels que } f(x) = f(x') \Longrightarrow f(x) = f(x').$

Théorème 2.1.2

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors

$$u \text{ est injective} \Longleftrightarrow \text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}.$$

Démonstration :

- u est injective $\Longrightarrow \text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$.

  Soit $\vec{x} \in \text{Ker } u$, donc $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$. Or u est linéaire, alors $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
  Ainsi,
  $$\begin{cases} u(\vec{x}) = u(\vec{0}_E) \\ u \text{ injective} \end{cases} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}_E$$
  .
  Donc $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$.

- $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\} \Longrightarrow u$ est injective.

  Soient $\vec{x}, \vec{x'} \in E$ tels que $u(\vec{x}) = u(\vec{x'})$
  $\Longrightarrow u(\vec{x} - \vec{x'}) = \vec{0}_F$ (puisque u est linéaire)
  $\Longrightarrow \vec{x} - \vec{x'} \in \text{Ker } u$
  $\Longrightarrow \vec{x} - \vec{x'} = \vec{0}_E$ (par hypothèse)
  $\Longrightarrow \vec{x} = \vec{x'}$
  donc u est injective.

Ceci finit la démonstration.

Proposition 2.1.6

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ injective, et $\mathcal{L} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ famille libre de E, alors la famille $\{u(\vec{v}_1), u(\vec{v}_2), \ldots, u(\vec{v}_n)\}$ est libre de F.

Démonstration :

On doit montrer que l'implication :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{v}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \lambda_i = 0.$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{v}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\Big) = \vec{0}_F$$

(u est linéaire). Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in \operatorname{Ker} u$$

.

Or u est injective alors $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$ (voir Théorème 2.1.2). Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}_E \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \lambda_i = 0$$

car $\mathcal{L} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ famille libre de E. Ce qui termine la démonstration.

2.1.8 Caractérisation de surjective, bijective

On rappelle qu'une application $f : A \to B$ est surjective si de A dans B si : $\forall y \in B, \exists x \in A, \text{ tel que } y = f(x).$

Théorème 2.1.3

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

u est surjective de E dans $F \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\ u = F$.

Démonstration : appliquer la définition de la surjectivité.

Proposition 2.1.7

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective, et $\mathcal{L} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ famille génératrice de E, alors la famille $\{u(\vec{v}_1), u(\vec{v}_2), \ldots, u(\vec{v}_n)\}$ est génératrice de F.

Démonstration

On sait que l'image par $u \in \mathscr{L}(E, F)$ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\ u$ (voir Théorème 2.1.1). Or l'application u est surjective, donc $\mathrm{Im}\ u = F$.

On rappelle qu'une application $f : A \to B$ est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition 2.1.8

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est bijective,

(ii) $\mathrm{Ker}\ u = \{\vec{0}_E\}$ et $\mathrm{Im}\ u = F$,

(iii) l'image par u d'une base de E est une base de F.

Démonstration

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : appliquer Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3).

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) : faire en exercice.

2.1.9 Isomorphismes

Définitions. On appelle :

- homomorphisme : $u \in \mathscr{L}(E, F)$;
- endomorphisme : $u \in \mathscr{L}(E, E)$;
- isomorphisme : $u \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective, on dit que E et F sont isomorphes;
- automorphisme : $u \in \mathscr{L}(E, E)$ bijective.

Proposition 2.1.9

E et F sont isomorphes $\Longleftrightarrow \dim\ E = \dim\ F$.

Démonstration : Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ un isomorphisme, donc u bijective. D'après Proposition 2.1.8, l'image par u d'une base de E est une base de F. Ces bases ont le même cardinal alors on a l'égalité de des dimensions de E et F.
La réciproque (voir exercice A.2.11.). Ceci termine la démonstration.

Proposition 2.1.10

Si u est un isomorphisme alors u^{-1} est un isomorphisme.

Démonstration : u est un isomorphisme alors u est bijective et donc u^{-1} est bijective aussi.
Il suffit donc de montrer que u^{-1} est linéaire.

Soient $\vec{y}, \vec{y'} \in F$ alors $\exists! \vec{x}, \vec{x'} \in E$ tels que $\vec{y} = u(\vec{x})$ et $\vec{y'} = u(\vec{x'})$.
On obtient

$$\begin{aligned} u^{-1}(\vec{y} + \vec{y'}) &= u^{-1}\big(u(\vec{x}) + u(\vec{x'})\big) \\ &= u^{-1}\big(u(\vec{x} + \vec{x'})\big) \\ &= (u^{-1} \circ u)(\vec{x} + \vec{x'}) \\ &= \vec{x} + \vec{x'} = u^{-1}(\vec{y}) + u^{-1}(\vec{y'}). \end{aligned}$$

De même on montre que $u^{-1}(\lambda \vec{y}) = \lambda u^{-1}(\vec{y})$

2.1.10 Isomorphismes entre E et K^n

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ alors pour tout $\vec{x} \in E$ ses composantes dans la base $\mathcal{E}$ sont uniques, on a :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

On définit l'application linéaire $\phi \in \mathscr{L}(E, K^n)$ par :

$$\forall \vec{x} \in E, \phi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

L'application $\phi \in \mathscr{L}(E, K^n)$ dépend de la base $\mathcal{E}$ choisie.

<u>Théorème 2.1.4</u>

L'application ϕ définie par

$$\vec{x} \in E \mapsto \phi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$$

est un isomorphisme de E sur K^n.

Comme pour tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathcal{E}$, l'application ϕ est bien définie.

<u>Démonstration</u> : faire en exercice A.1.1

2.1.11 Formes linéaire

Définition (forme linéaire)
On appelle u une forme linéaire sur E une application linéaire de E dans K, i.e. $u \in \mathscr{L}(E, K)$.

Exemples :

1. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et l'application $u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.
2. Soit $\mathscr{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. On définit, pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1])$

$$u(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

u une forme linéaire sur $\mathscr{C}([0,1])$.

Théorème 2.1.5

Soit E un espace vectoriel d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, et soit $u \in \mathscr{L}(E, K)$ une forme linéaire sur E, alors il existe n éléments de K, notés $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ tels que $\forall \vec{x} \in E$ on a

$$u(\vec{x}) = u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i .$$

Démonstration :

On a $F = K$, et donc les images $u(\vec{e}_i)$ sont des scalaires que l'on peut noter β_i. On a donc

$$u(\vec{x}) = u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{u(\vec{e}_i)}_{\beta_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i .$$

Exercices de TD 4 : Mercredi (18 sep), Jeudi(19 sep)

- Exercise A.2.3 (page 49)
- Exercice A.2.6, Questions 1. et 2, (page 50)
- Exercice A.2.17 (page 55)
- Exercice A.2.4 (page 50)