MT23 - Algèbre linéaire

Chapitre 3

Déterminants

Mokhtar Z. Alaya

http://mzalaya.github.io/files/teaching/UTSEUS/MT23/chap3-part1.pdf

Université de Shanghai, UTSEUS, 25 novembre 2025

Motivations

- Critère numérique qui nous indique quand une matrice carrée est inversible (régulière).

- Utile pour la résolution des systèmes linéaires.

Notations (1)

- Nous travaillons dans ce chapitre que avec des matrices carrées, c'est à dire :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Représentation par des vecteurs colonnes :

$$A = (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notations (2)

- Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la matrice $A_{|i,j|} \in \mathcal{M}_{n-1}$, la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j

$$A_{|i,j|} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.1.1 Définition

Définition (par récurrence)

On définit l'application déterminant

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_n & \to & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

par récurrence :

- **Si** $n = 1$**, la matrice** $A = (a_{11})$**, et** $\det(A) = a_{11}$**.**
- **Si** $n > 1$**, on pose**

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{|1,1|}) - a_{12}\det(A_{|1,2|}) + \cdots + (-1)^{1+j}\det(A_{|1,j|}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{|1,n|})$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{|1,j|})$$

Remarques

- (i). Soit $A \in \mathcal{M}_n$ alors $\det(A)$ est un scalaire.
- (ii). On note

$$\det(A) = \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n)$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- (iii). Si $A \in \mathcal{M}_2$ alors

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{|1,1|}) + (-1)^{1+2} a_{12}\det(A_{|1,2|})$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ainsi

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **(iv). Si $A \in \mathcal{M}_3$ alors**

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{|1,1|}) - a_{12}\det(A_{|1,2|}) + a_{13}\det(A_{|1,3|})$$

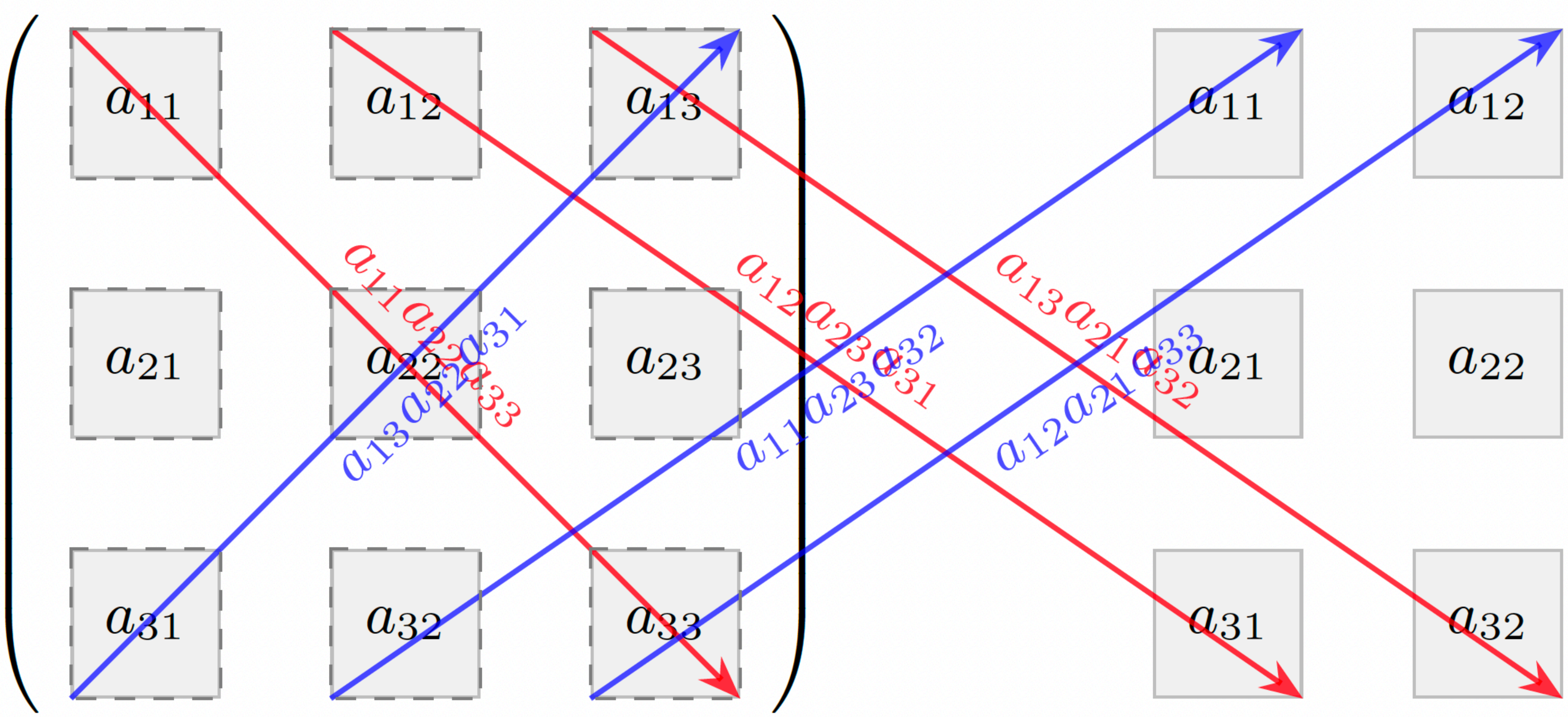
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= {\color{red}a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} {\color{blue}- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

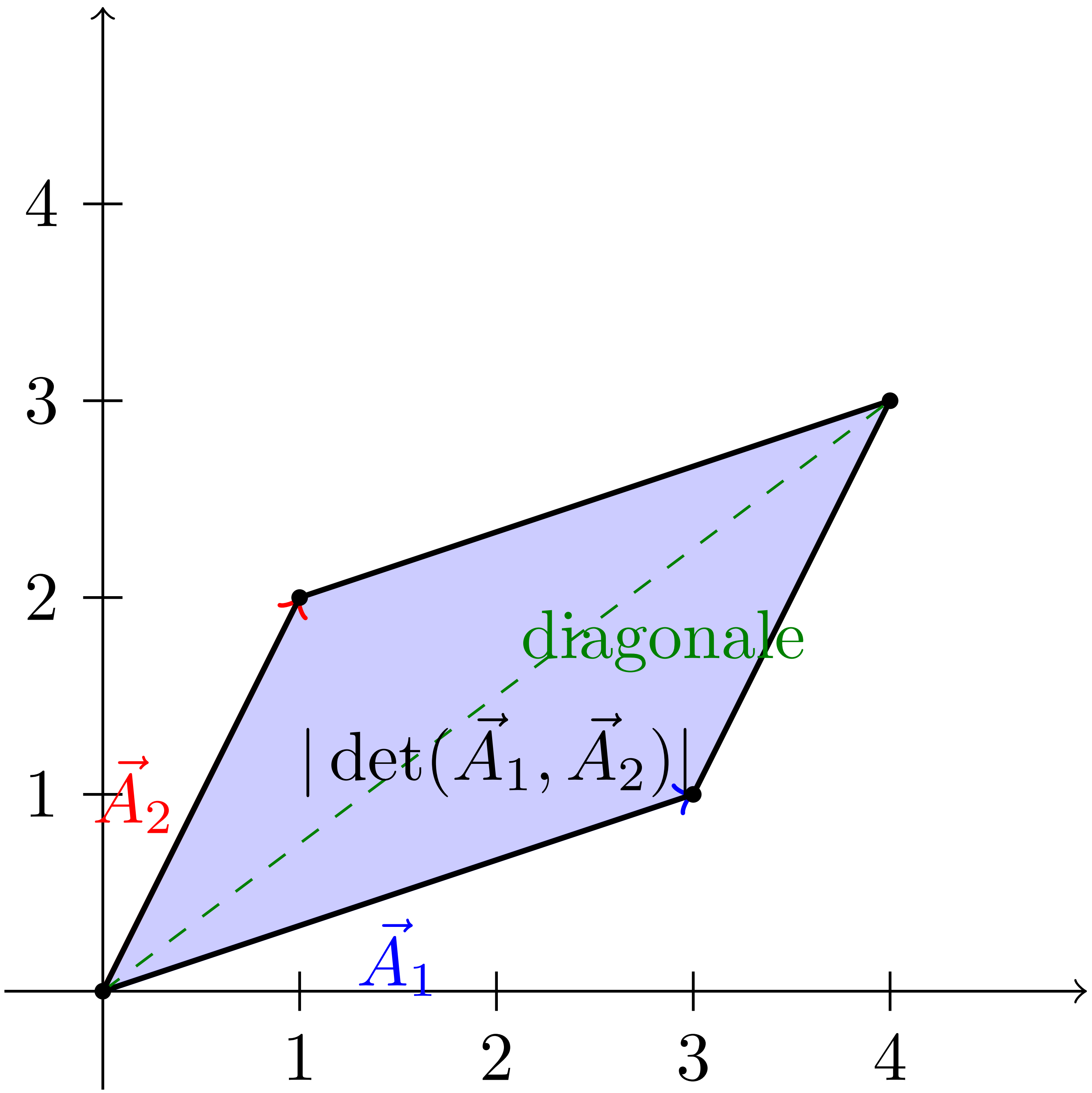
- **(v). Règle de Sarrus pour $A \in \mathcal{M}_3$.**



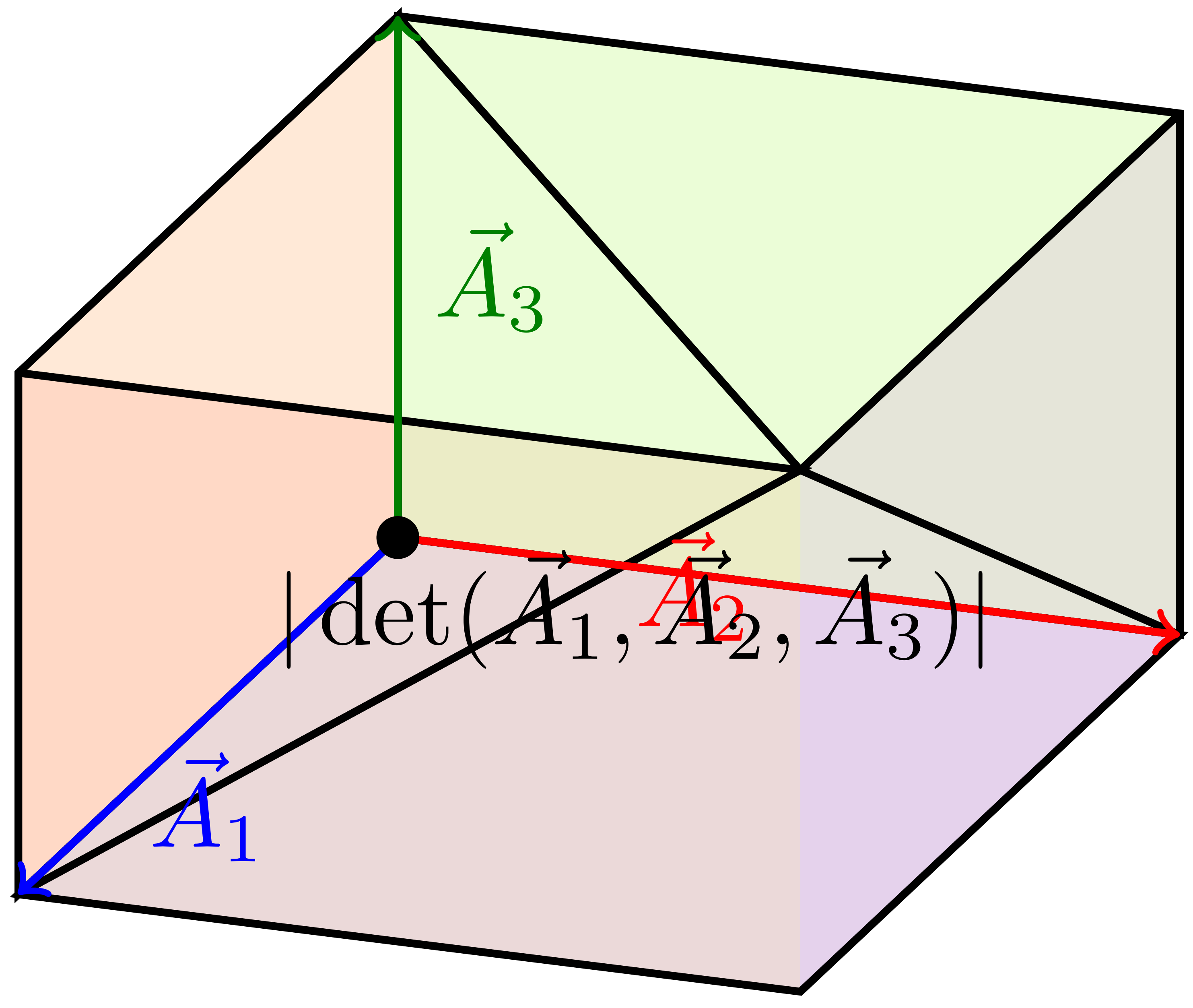
Diagonales descendantes : +

Diagonales ascendantes : -

- (vi). Si $A \in \mathcal{M}_2$ alors $|\det(A)|$ représente l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs colonnes $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$.



• **(vii).** Si $A \in \mathcal{M}_3$ alors $|\det(A)|$ représente le volume du volume du parallélépipède défini par les vecteurs colonnes $\vec{A}_1, \vec{A}_2,$ et $\vec{A}_3$.



Proposition

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors $$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(iii) Soit $D \in \mathcal{M}_n$ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

alors $$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

(iv) Matrice identité : $\det(I_n) = 1$.

(v) $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$.

3.1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de $\dim(E) = n$ et $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E. Soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in E$. On note par $\vec{X}_1, \ldots \vec{X}_n \in \mathcal{M}_{n,1}$, les composantes des vecteurs $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ dans la base $\mathcal{E}$. Alors,

$$\det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n).$$

Exemple. (au tableau)

3.1.3 Déterminant : forme multilinéaire

Théorème (3.1.1). Le déterminant est une **fonction multilinéaire**, c'est à dire linéaire par rapport à chaque colonne :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall B, C \in \mathcal{M}_n$, on a

$$\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \lambda \vec{A}_j, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n) = \lambda \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{A}_j, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n)$$

et

$$\begin{aligned}\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{B} + \vec{C}, \vec{A}_{j+1} \ldots, \vec{A}_n) &= \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{B}, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n) \\ &+ \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{C}, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n)\end{aligned}$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de la matrice.

Proposition (3.1.2).

(i). Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(ii). Si une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$.

Preuve. (au tableau).

3.1.4 Propriétés de déterminant liées au colonnes adjacentes

<u>Proposition (3.1.3).</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n$

(i) Si deux colonnes adjacentes sont égales, $\vec{A}_j = \vec{A}_{j+1}$, le déterminant $\det(A) = 0$.

(ii) Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe

$$\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n) = -\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j+1}, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_n).$$

<u>Preuve.</u> La preuve se fait par récurrence sur la dimension de la matrice.

3.1.5 Propriétés de déterminant liées au colonnes

Théorème (3.1.2). Soit $A \in \mathcal{M}_n$

(i) Si deux colonnes sont égales, $\vec{A}_j = \vec{A}_k$, le déterminant $\det(A) = 0$.

(ii) Si on échange entre elles deux colonnes , le déterminant change de signe

$$\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_k, \ldots, \vec{A}_n) = -\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_k, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_n).$$

Preuve. (au tableau).

Théorème (3.1.3). Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n$ ne change pas, si à une colonne on ajoute une combinaison linéaires des autres colonnes.

$\forall j, \forall (\alpha_k)_{k \neq j} \in \mathbb{K}^{n-1}$,

$$\det\left(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k \vec{A}_k, \ldots, \vec{A}_n\right) = \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_n) = \det(A).$$

Preuve. (au tableau).

3.1.6 Propriétés de déterminant liées aux lignes

Théorème (3.1.4). Soit $A \in \mathcal{M}_n$, $\det(A^\top) = \det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{L}_1 \\ \vec{L}_2 \\ \vdots \\ \vec{L}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème (3.1.5). Soit $A \in \mathcal{M}_n$,

(i) Le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes.

(ii) S'il $\exists i, l \in \{1, \ldots, n\},\ \text{tq. } \vec{L}_i = \vec{L}_l$ alors $\det(A) = 0$.

(iii) Si l'on change deux lignes, $\det(A)$ change de signe.

(iv) Le déterminant ne change pas, si à une ligne on ajoute une combinaison linéaires des autres lignes.

Preuve. Appliquer les résultats précédents à la matrice transposée $A^\top$.

Proposition (3.1.6). Soit $A \in \mathcal{M}_n$, triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Preuve. $A^\top$ est triangulaire inférieure.

3.1.7 Calcul pratique de détérminant

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le scalaire $\mathrm{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|})$.

Théorème (3.1.6). Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les formules suivantes :

(i) Développement suivant la i-ème ligne :

$$\det(A) = a_{i1}\mathrm{Cof}(a_{i1}) + \cdots + a_{in}\mathrm{Cof}(a_{in}).$$

(ii) Développement suivant la j-ème colonne :

$$\det(A) = a_{1j}\mathrm{Cof}(a_{1j}) + \cdots + a_{nj}\mathrm{Cof}(a_{nj})$$

Conclusion. On cherche à construire une matrice contenant "beaucoup" de zéros sur une ligne ou une colonne et on développe.

3.2 Utilisation des déterminants

3.2.1 Déterminant d’une base de vecteurs

3.2.2 Déterminant et matrice inversible

3.2.3 Déterminant d’un endomorphisme

3.2.4 Rang d’une matrice

Exercices de TD (Homeworks)

TD

- Exercices A.2.1, A.2.2, A.2.3, (page 39)
- Exercise A.2.6 (page 40)
- Exercise A.2.8 (page 41)
- Exercise A.2.14 (page 43)