TD N°2 :

Exercice A.2.8 (p 32)

- E : espace vectoriel, $(E, +, \cdot)$ réel $(K = \mathbb{R})$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ linéairement indépendants

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ famille libre (linearly independent sequence)

Soient

$$\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

Question Est-ce que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \lambda_2 (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v}_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\,\vec{v}_1 + b\,\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$ (parce que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre)

définition famille libre

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

pivot de Gauss

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{cl}}$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$

$\underline{\underline{cl}}$ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est libre.

$\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - \alpha \vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\alpha \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_1 \vec{\omega}_1 + \mu_2 \vec{\omega}_2 = \vec{0}$$

$$\iff \mu_1 (3\vec{v}_1 - \alpha \vec{v}_2) + \mu_2 (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\iff \underbrace{(3\mu_1 + \mu_2)}_{\alpha_1} \vec{v}_1 + \underbrace{(\mu_2 - \alpha\mu_1)}_{\alpha_2} \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$ car $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 \end{cases} \quad (S)$$

$$\iff \begin{cases} 3\mu_1 + \mu_2 = 0 & (1) \\ \mu_2 = \alpha\mu_1 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow 3\mu_1 + \alpha\mu_1 = 0$

$$\Rightarrow (3+\alpha)\mu_1 = 0$$

si $\alpha = -3$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_2 + 3\mu_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3\mu_1 + \mu_2 = 0$$

$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \,/\, \mu_1 \vec{w_1} + \mu_2 \vec{w_2} = 0$

$\Longrightarrow 3\mu_1 + \mu_2 = 0$

si on choisit $\underset{\neq 0}{\mu_1 = 1}$, $\underset{\neq 0}{\mu_2 = -3}$

$\Longrightarrow \{w_1, w_2\}$ est liée

2ème cas: $\alpha \neq -3$

$(3+\alpha)\mu_1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3+\alpha = 0}_{\text{Impo}}$ ou $\mu_1 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\mu_1 = 0}$

$\Longrightarrow \mu_2 = 0$

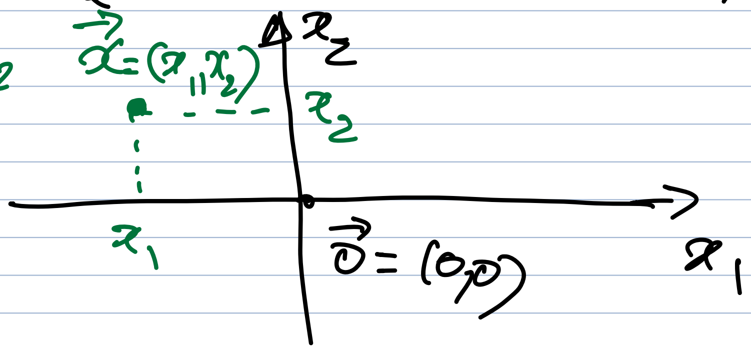
Cl : si $\alpha = -3$ alors la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est liée.
si $\alpha \neq -3$ alors ______________ — libre

Ex A.2.9

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$$

$$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

$E = \mathbb{R}^2$



(1) • F est un sous espace vectoriel. En effet,

- $\vec{0} = (0,0) \in F$
- ~~Soit~~ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}, \vec{y} \in F$.

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

On a : $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu y_1, \mu y_2)$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$$

on a $2(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_2 + \mu y_2$

$$= \lambda \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{=0} + \mu \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{0}$$

$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \qquad (\vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in F)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F.$

Cl F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- De même, on montre que G est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Famille génératrice : Def 1.2.4 page 16

$S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$, $\vec{x}_i \in E$

S est génératrice de E et on note

$$E = \text{vect}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$$

$\vec{x} \in E \iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$$

Base :

$S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ssi S est génératrice et libre

Base de F : S génératrice famille ① S est libre ②

$$\forall\, \vec{x} \in F \iff \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2) \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} = (x_1, -2x_1) \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{x} = x_1 \underbrace{(1,-2)}_{\vec{v}_1} \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{x} = x_1 \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 = (1,-2) \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

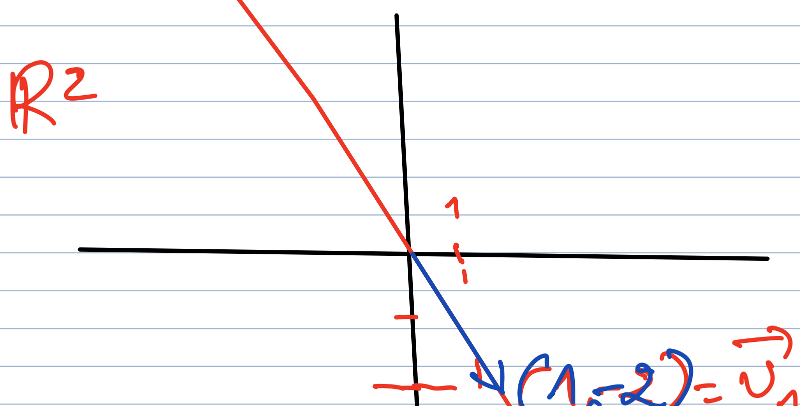
$$\implies \begin{cases} \vec{x} = x_1 \vec{v}_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\forall \vec{x} \in F \iff \vec{x} = x_1 \vec{v}_1$ ~~dont~~ $x_1 \in \mathbb{R}$

Alors $\{\vec{v}_1\}$ est génératrice de F. On écrit

$$F = \text{vect}\langle \vec{v}_1 \rangle \text{ avec } \vec{v}_1 = (1,-2)$$

$F : 2x_1 + x_2 = 0$



$\forall \vec{x} \in F, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} = \alpha \vec{v}_1.$

donc $\{\vec{v}_1\}$ est génératrice F

$\{\vec{v}_1\}$ est libre car $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

$$\lambda \vec{v}_1 = \vec{0} \overset{?}{\implies} \lambda = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda(1,-2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Ex A.2.9 (Continuous)

2) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G \iff \mathbb{R}^2 = F+G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$

On montre $\mathbb{R}^2 = F+G$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ tels que $\vec{y} \in F$ & $\vec{z} \in G$

soit $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{y} \in F \iff \exists \alpha_1 \in \mathbb{R} ; \vec{y} = \alpha_1 \vec{v_1}$

$\vec{z} \in G \iff \exists \alpha_2 \in \mathbb{R} ; \vec{z} = \alpha_2 \vec{v_2}$

? (α_1, α_2) tq $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$$
$$= \alpha_1 (1,-2) + \alpha_2 (1,1)$$

$$\iff (x_1, x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2 , -2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 & (L_1) \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = x_2 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ 3\alpha_2 = x_2 + 2x_1 \end{cases}$$

$(L_2) \leftarrow L_2 + 2L_1$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = x_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x_1 - x_2}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3} \end{cases}$$

enfin:

$\vec{x} = (1,0)$, $\alpha_1 = 1/3$; $\alpha_2 = \frac{2}{3}$

$(1,0) = 1/3\, v_1 + 2/3\, \vec{v}_2$

Cl $\forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \exists\ \alpha_1 = \frac{x_1 - x_2}{3}$ et $\alpha_2 = \frac{x_2 + 2x_1}{3}$ tels que

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset F + G$

or $F + G \subset \mathbb{R}^2$

Donc $\mathbb{R}^2 = F + G$

Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

Ex A.2.10

1) Soit la famille

$\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre ?

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (1,0,-1) + \lambda_2 (-1,2,1) + \lambda_3 (3,-4,-3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, \; 2\lambda_2 - 4\lambda_3, \; -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ 0\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & (L_2) \\ \boxed{-\lambda_1} + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (Y)$$

Si andăsit,

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$ alors (J) est vrai.

Donc $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = \vec{0}$ =

Donc la famille est liée.

- On a la famille $\mathcal{F}$ est liée.

donc $-\vec{v_1} + 2\vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{v_1} = 2\vec{v_2} + \vec{v_3}$

ou $\vec{v_3} = \vec{v_1} - 2\vec{v_2}$

R_1 $\mathcal{F}$ est liée

$\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tq

$\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = \vec{0}$

Sans perte de généralisation on suppose $\lambda_1 \neq 0$.

donc $\vec{v_1} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{v_3}$

- $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}$.

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \exists ?\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

tq $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$

On sait que

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \quad \text{donc}$$

$$\vec{x} = \alpha_1(2\vec{v}_2+\vec{v}_3) + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$$

$$\Rightarrow \vec{x} = (\alpha_2+2\alpha_1)\vec{v}_2 + (\alpha_3+\alpha_1)\vec{v}_3$$

$$\Rightarrow \vec{x} = (\alpha_2+2\alpha_1)(-1,2,1) + (\alpha_3+\alpha_1)(3,-4,-3)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \big(-(\alpha_2+2\alpha_1)+3(\alpha_3+\alpha_1),\ 2(\alpha_2+2\alpha_1)-4(\alpha_3+\alpha_1),\ (\alpha_2+2\alpha_1 - 3(\alpha_3+\alpha_1))\big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 & L_1 \\ 2\alpha \quad - 4\alpha \quad = x & L_2 \end{cases}$$

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = x_3 \quad L_3$$

$$\underbrace{-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3}_{-x_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = x_2 \\ x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution si $x_1 + x_3 \neq 0$. On conclut qu'ils

$$\Rightarrow \nexists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$$

donc la famille $\mathcal{F}$ n'est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Rq $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_3 = 0\}$

F est générateur de H

③ $F = \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$

Base de F = ?

Rappelons que $\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

$\forall \vec{x} \in F, \iff \exists\, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$

tq $\vec{x} = \gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \gamma_3 \vec{v}_3$

$$\iff \vec{x} = \gamma_1 (2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \gamma_2 \vec{v}_2 + \gamma_3 \vec{v}_3$$

$$\iff \vec{x} = \underbrace{(2\gamma_1 + \gamma_2)}_{a} \vec{v}_2 + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_3)}_{b} \vec{v}_3$$

$\forall \vec{x} \in F \iff \exists\, a, \exists\, b \,/$

$$\vec{x} = a \vec{v}_2 + b \vec{v}_3$$

$\Rightarrow \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice

or $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre

donc $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base

Montrons $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre :

$$\lambda_1 \vec{v}_2 + \lambda_2 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\triangle$!