TD N°2

Exercice A.2.8 (p32)

Soit E espace vectoriel réel $K = \mathbb{R}$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ deux vecteurs linéairement indépendants

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

Soient $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Question: Est ce que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \lambda_1(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \lambda_2(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\underbrace{2\lambda_1 + \lambda_2}_{a})\vec{v}_1 + (\underbrace{\lambda_1 + 2\lambda_2}_{b})\vec{v}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{et } \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$ car $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre

Méthode de pivot de Gauss.

$\Leftrightarrow$ pivot $\begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $\qquad -3\lambda_2 = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\forall\, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$

cl : $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une famille libre.

- $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - \alpha\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; $\alpha \in \mathbb{R}$

soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2 = \vec{0}$$

$$\iff \mu_1(3\vec{v}_1 - \alpha\vec{v}_2) + \mu_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\iff \underbrace{(3\mu_1 + \mu_2)}_{a}\vec{v}_1 + \underbrace{(\mu_2 - \alpha\mu_1)}_{b}\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 \end{cases}$$ car $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ famille libre.

$$\iff \begin{cases} \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 & (L_1) \\ \mu_2 + 3\mu_1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \begin{cases} \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \begin{cases} \ldots \\ (\alpha+3)\mu_1 = 0 \end{cases}$

1er cas : $\alpha = -3$

on a $\mu_2 + 3\mu_1 = 0$. Si on choisit $\mu_2 = 3$ et $\mu_1 = -1$

alors $\mu_2 + 3\mu_1 = 0$

$\exists\, \mu_1 = 3 \neq 0$ et $\mu_2 = -1 \neq 0$ tq

$$\mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2 = \vec{0}$$

donc $\{\vec{w}_1, w_2\}$ est liée

2ème cas : $\alpha \neq -3$

on a $\begin{cases} \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 \\ \underbrace{(\alpha+3)}_{\neq 0}\mu_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_2 - \alpha\mu_1 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$

Conclusion :

$\forall\, \alpha \neq -3$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre

$\alpha = -3$, ——————— liée.

Exercice A.2.9

$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$

$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$

1 - $\vec{0} = (0,0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}, \vec{y} \in F$.

on a $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$

on a $2(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_2 + \mu y_2$

$= \lambda(\underbrace{2x_1 + x_2}_{=0\ (\vec{x} \in F)}) + \mu(\underbrace{2y_1 + y_2}_{=0\ (\vec{y} \in F)})$

$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0$

$= 0$

$\Rightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$

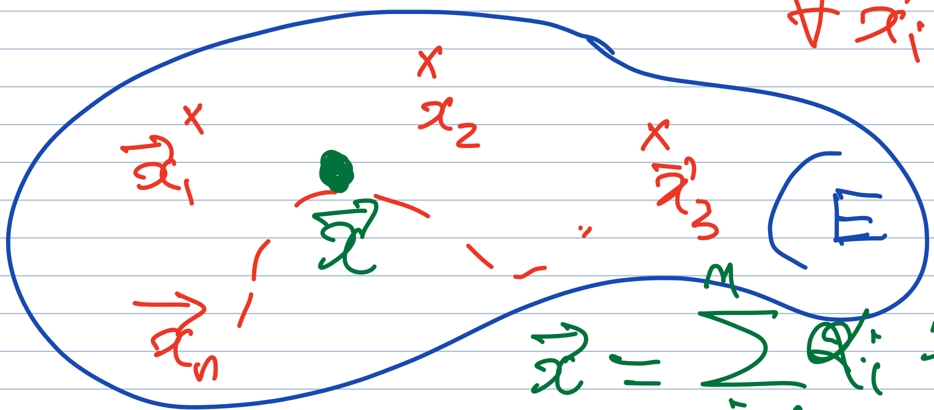
Donc F est un sous-espace vectoriel.

De même, on vérifie que G est un sous espace vectoriel.

Rappel: $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ est une base si S est génératrice et libre

Définiti 1.2.4.

$\forall \vec{x}_i, \vec{x}_i \in E$



$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$$

E est un sous-espace vectoriel engendré par $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ si

Spanned

$$\forall \vec{x} \in E \iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$$

$$E = \mathrm{Vect}\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$$

" $\mathrm{Span}\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ "

$\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ est une $\boxed{\text{famille génératrice}}$

$\boxed{\text{Base de F}}$

$$\forall \vec{x} \in F \iff \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$x_2 = -2x_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = (x_1, -2x_1) \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

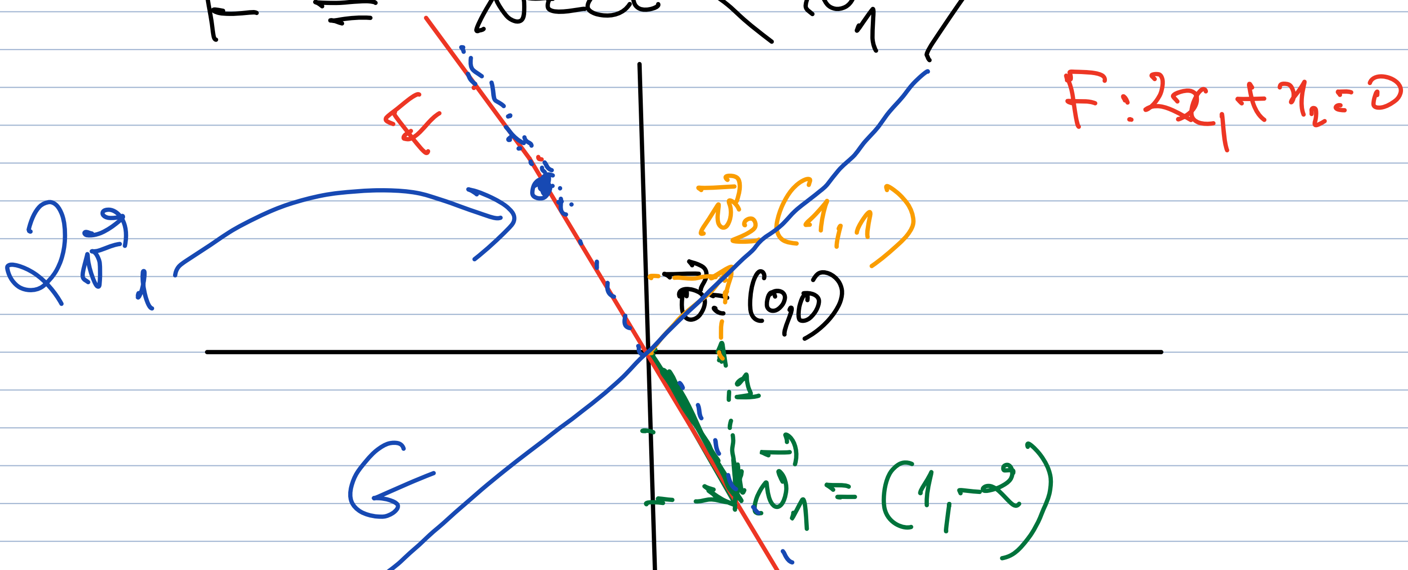
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = x_1 \underbrace{(1, -2)}_{\vec{v}_1} \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = x_1 \vec{v}_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\forall \vec{x} \in F \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}, \vec{x} = x_1 \vec{v}_1$.

$\Leftrightarrow \{\vec{v}_1\}$ est génératrice de F.

$$F = \text{vect}\langle \vec{v}_1 \rangle$$



$\forall \vec{x} \in F, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} = \alpha \vec{v}_1$

• on a $\{\vec{v}_1\}$ est libre car $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

Rq $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \{\vec{v}\}$ est libre

$$\mu \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow (\mu, -2\mu) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \mu = 0$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \mu = 0$$

$$\Rightarrow \{\vec{v}_1\} \text{ est libre}$$

Alors la famille $\{\vec{v}_1\}$ est génératrice et libre donc $\{\vec{v}_1\}$ est une base de F.

Base de G :

Posons $\vec{v}_2 = (1,1)$

alors $\{\vec{v}_2\}$ est une famille génératrice et libre.

donc $\{\vec{v}_2\}$ est une base de G.

2) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

$\boxed{\ }$ $F \cap G = \{\vec{0}\}$

- $\left.\begin{array}{l} F \text{ sev} \\ G \text{ sev} \end{array}\right\} \Longrightarrow F \cap G \text{ sev}$

$\Longrightarrow \{\vec{0}\} \subset F \cap G$

Montrons que $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$

$\forall \vec{x} \in F \cap G \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \in F \\ \vec{x} \in G \\ \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{\vec{x} = (0, 0) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Alors $\left.\begin{array}{l} F \cap G \subset \{\vec{0}\} \\ \text{et} = \end{array}\right\}$ $\underline{F \cap G = \{\vec{0}\}}$

$\mathbb{R}^2 =$

Exercice A.2.9 (Continuous)

$\mathbb{R}^2 = F \oplus G \iff \mathbb{R}^2 = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$

- $\mathbb{R}^2 = F + G \iff$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\exists \vec{y} \in F, \exists \vec{z} \in G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

or $F = \text{Vect}\langle \vec{v}_1 \rangle \iff \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}, \vec{y} = \alpha_1 \vec{v}_1$

et $G = \text{Vect}\langle \vec{v}_2 \rangle \iff \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}, \vec{z} = \alpha_2 \vec{v}_2$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \underbrace{\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}_{?}, \vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$

soit $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = (x_1, x_2) = \alpha_1 (1, -2) + \alpha_2 (1, 1)$

$\iff (x_1, x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_2)$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 & L_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = x_2 & L_2 \end{cases}$ $\cancel{\iff L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ 3\alpha_2 = x_2 + 2x_1 \end{cases}$

$\alpha_1 = x_1 - \alpha_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3x_1 - \dfrac{x_2 - 2x_1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x_1 - x_2}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3} \end{cases}$$

$\forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\ \alpha_1 = \dfrac{x_1 - x_2}{3}$

et $\exists\ \alpha_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3}$

tels que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset F + G$

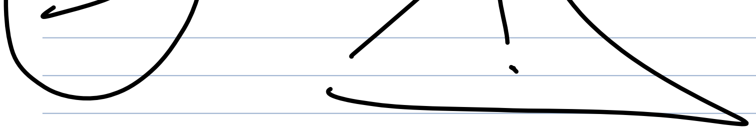
or $\left.\begin{array}{l} F \text{ sev de } \mathbb{R}^2 \\ G \text{ sev de } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow F + G \text{ sev de } \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^2$

On conclut que $\mathbb{R}^2 = F + G$

Ainsi, $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

B



Ex A.2.3

1. Snt $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$

$\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$

$\vec{v}_3 = (3, -4, -3)$

■ $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel sque

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\iff \lambda_1 (1, 0, -1) + \lambda_2 (-1, 2, 1) + \lambda_3 (3, -4, -3) = \vec{0}$

$\iff (\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3,$

$2\lambda_2 - 4\lambda$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & L_1 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & L_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_3$$

$$\lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

(4) l'ensemble des solutions de système (S) est

$$\left(-\lambda_3, 2\lambda_3, \lambda_3\right), \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 3\lambda_3 = 2\lambda_3 - 3\lambda_3 = -\lambda_3$$

Si on choisit

$$\lambda_3 = 1 \neq 0 ; \quad \lambda_2 = 2 \neq 0$$

$$\lambda_1 = -1 \neq 0$$

on a $-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\Rightarrow$ la famille $\mathcal{F}$ est liée et on a la relation suivante

$$\boxed{\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3}$$ ← relation linéaire

■ $\mathcal{U}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

? $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\exists ? \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

tq $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$

Supposons que

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 (2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x_1, x_2, x_3)}^{\vec{x}} = (2\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v}_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)\vec{v}_3$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_1+\alpha_2)(-1,2,1) + (\alpha_1+\alpha_3)(3,-4,-3)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \big(-(2\alpha_1+\alpha_2)+3(\alpha_1+\alpha_3),\; 2(2\alpha_1+\alpha_2)-4(\alpha_1+\alpha_3),\; 2\alpha_1+\alpha_2-3(\alpha_1+\alpha_3)\big)$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3,\; 2\alpha_2-4\alpha_3,\; -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3)$$

$\Longleftrightarrow$ on peut écrire le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 & L_1 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = x_2 & L_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = x_3 & L_3 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $L_3 \leftarrow (-1) L_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = x_2 \\ \underbrace{\alpha_1 - \alpha_2}_{x} - 3\alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (1)

$$\begin{cases} \alpha_1 \cancel{-} \alpha_2 + 3\alpha_3{}^{1} = x_1 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = x_2 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On conclut que si $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1 + x_3 \neq 0$, alors $(\mathcal{S})$ n'admet pas de solution donc il n'existe pas des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$$

donc la famille $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit F un ~~espace~~ sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$

$$F = \mathrm{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$$

Déterminer une base de F.

On a

$F = \text{vect}\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle$

$\Leftrightarrow$

$\forall \vec{x} \in F, \exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$

tels que $\vec{x} = \gamma_1 \vec{v_1} + \gamma_2 \vec{v_2} + \gamma_3 \vec{v_3}$

or $\vec{v_1} = 2\vec{v_2} + \vec{v_3}$

$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \vec{F}, \exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$

tq $\vec{x} = \gamma_1 (2\vec{v_2} + \vec{v_3}) + \gamma_2 \vec{v_2} + \gamma_3 \vec{v_3}$

$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in F, \exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$

tq $\vec{x} = (\underbrace{2\gamma_1 + \gamma_2}_{a}) \vec{v_2} + (\underbrace{\gamma_1 + \gamma_3}_{b}) \vec{v_3}$

$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in F, \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$ tq

$$\vec{x} = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3$$

alors $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice de F.

Maintenant, on vérifie que $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre.

Soient $\alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3 = \vec{0}$

$$\iff \alpha(-1,2,1) + \beta(3,-4,-3) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - 4\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \alpha = \beta = 0.$$

Alors $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice et libre de F.

donc $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de F.

2