TD3 - G1001.

Ex A.2.12 (p.32) Chap I

$E = \{ \text{polynôme } P \mid \text{degre}(P) \leq 3 \}$

$$\boxed{P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 , \quad a_i \in \mathbb{R}}$$

$P(t) = t^3 + 1 \in E$, $P(t) = 1 \in E$

On définit

$\forall t \in \mathbb{R}$, $p_0(t) = 1$; $p_1(t) = t$; $p_2(t) = t(t-1)$

$p_3(t) = t(t-1)(t-2)$

① Montrons que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base dans E.

Rq : $\dim E = 4$.

Base de $\mathbb{R}^4$

E admet une base $\underbrace{e_1 = (1,0,0,0) \ldots e_4 = (0,0,0,1)}_{\text{vecteur} \quad \text{vecteur}}$

? $\forall P \in E$

$\underline{P} = \boxed{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_4 e_4} \in \mathbb{R}^4$

? $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \in \mathbb{R}$

$\dim(E) = 4$. En effet, la famille

$q_0(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$q_1(t) = t$,

$q_2(t) = t^2$;

$q_3(t) = t^3$

polynômes

la famille $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base canonique de E.

$\mathrm{Card}(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 4 = \dim(E)$.

Il suffit de montrer que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est libre

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = \mathbf{0}$$ polynôme nul ($\forall t \in \mathbb{R}$ $\mathbf{0}(t) = 0$)

$$\Leftrightarrow \lambda_0 p_0(t) + \lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = \mathbf{0}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t(t-1) + \lambda_3 t(t-1)(t-2) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 - \lambda_2 t + \lambda_3 (t^2 - t)(t-2) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 \underbrace{1}_{q_0} + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)\underbrace{t}_{q_1} + (\lambda_2 - 3\lambda_3)\underbrace{t^2}_{q_2} + \lambda_3 \underbrace{t^3}_{q_3} = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 q_0 + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) q_1 + (\lambda_2 - 3\lambda_3) q_2 + \lambda_3 q_3 = \mathbf{0}$$ polynôme nul

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$ puisque $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est libre.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \text{ est libre}$$

$\begin{cases} \mathrm{Card}(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 4 = \dim(E) \\ \text{et } \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \text{ est libre} \end{cases}$ Proposition 1.2.7 ①

$\Rightarrow \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base

2) Soit $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Question : Exprimer (explicit) les coordonnées de p ~~dans~~ dans la base $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ en fonction de a, b, c, d ?

$\underbrace{\{q_0, q_1, q_2, q_3\}}_{\text{base de } E}$ $\mathcal{B}_c$ | $\mathcal{B}$: $\underbrace{\{p_0, p_1, p_2, p_3\}}_{\text{Base de } E}$

(a, b, c, d) | $(\quad , \quad , \quad , \quad)$

on écrit $p(t) = \alpha_0 p_0(t) + \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t)$

$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en fonction (a, b, c, d)

$\Leftrightarrow at^3 + bt^2 + ct + a = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 (t^2 - t) + \alpha_3 t(t-1)(t-2)$

$\Leftrightarrow a q_3 + b q_2 + c q_1 + a q_0 = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_2 - q_1)$

$$+\alpha_3 t(t-1)(t-2)$$

or $t(t-1)(t-2) = (t^2-t)(t-2)$
$$= t^3 - 2t^2 - t^2 + 2t$$
$$= t^3 - 3t^2 + 2t$$

$\Leftrightarrow$ $a q_3 + b q_2 + c q_1 + d q_0$
$$= \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_2 - q_1) + \alpha_3 \left(\frac{q_3 - 3q_2 + 2q_1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $a q_3 + b q_2 + c q_1 + d q_0$
$$= \alpha_0 q_0 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) q_1 + (\alpha_2 - 3\alpha_3) q_2 + \alpha_3 q_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = b \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

(puisque $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est libre.)

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_3 = a \\ \alpha_1 = c + \alpha_2 - 2a \\ \alpha_2 = b + 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 = b + c + a \\ \alpha_2 = b + 3a \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

Ex A.2.16

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$ ← espace vectoriel

Si $\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée on a $\vec{v}_3 \in \text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$ $\quad (\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_3)$

$\Rightarrow \vec{v}_3 \in \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ $\quad \left(\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle \right)$

$\Rightarrow \boxed{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; ; \; \vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2}$

donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée.

Question : ? Réciproque est-elle exacte : ?

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$

Supposons que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ et $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre

on a $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une famille liée.

$$\dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) = \dim(\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle) = \dim(\text{vect}(\langle \vec{v}_1 \rangle)) = 1.$$

Maintenant

$$\dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle) = \dim(\text{vect}\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) \neq \dim(\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle)$$

donc $\text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \neq \text{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$

(voir Proposition 1.2.8
$E = F \Longleftrightarrow \dim E = \dim F$.

Ex A.2.19 (page 34)

Snt. E : espace vectoriel de $\dim(E)$ finie

. A et B : s-e-v de E.

① $A \cap B = \{\vec{0}\}$

et $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ base de A.

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ base de B.

$\dim(A \oplus B) = ?$

ⓐ $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ est une base de $A \oplus B$

génératrice + libre

$\forall \vec{x} \in A \oplus B \iff \exists! \vec{a} \in A$ et $\exists! \vec{b} \in B$ tels que
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

or $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ base de $\vec{a}$ Proposition 1.2.6

$\iff \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tq $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p$

De même (similarly)

$\iff \exists! \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tq $\vec{b} = \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \dots + \beta_q \vec{b}_q$

Alors $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{a}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{b}_j$

$\iff \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ est génératrice de $A \oplus B$.

$\forall \vec{x} \in A \oplus B \iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$

tel que $x = \sum_{i=1} \alpha_i \vec{a}_i + \sum_{j=1} \beta_j \vec{b}_j$

$$\iff A \oplus B = \mathrm{Vect}\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q \rangle$$

Montrons $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ est libre

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ tels que

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p + \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_q \vec{b}_q = \vec{0}$$

$A \oplus B \iff A \oplus B = A + B$

et $A \cap B = \{\vec{0}\}$

$$\iff \underbrace{\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p}_{\vec{z}} = \underbrace{-(\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \dots + \beta_q \vec{b}_q)}_{\vec{z}'}$$

$$\vec{z} = \vec{z}'$$

on a $\begin{cases} \vec{z} \in A \\ \vec{z}' \in B \end{cases} \Rightarrow \vec{z} = \vec{z}' \in A \cap B$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{z} = \vec{0} \\ \text{et } \vec{z}' = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p = \vec{0} \\ \text{et } \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_q \vec{b}_q = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0 \\ \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0 \end{cases}$$

puisque $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ base de A

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ — B.

Donc $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ est libre.
donc base.

b) $\dim(A \oplus B) = \dim(A) + \dim(B)$

D'après Question 1) a) on a la famille
$\mathcal{F} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_q\}$
est une base de $A \oplus B$.

$\Rightarrow \dim(A \oplus B) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = p + q$

D'autre part (on the other hand)

$\dim(A) = p = \mathrm{Card}(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\})$

$\dim(B) = q = \mathrm{Card}(\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\})$

$\Rightarrow \dim(A) + \dim(B) = p + q.$

cl : $\dim(A \oplus B) = \dim(A) + \dim(B)$

(2) Supposons que $A \cap B = \{\vec{0}\}$

H supplémentaire dans A de $A \cap B$.

$\Leftrightarrow \quad A = H \oplus A \cap B.$

(a) $A \cap B$ est un sev de E. (

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ sev de } E \\ B \text{ sev de } E \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B \text{ sev de } E$$

(b) $H \cap B = \{\vec{0}\}$ Rq: $V = W \iff V \subset W$ et $W \subset V$

. $\{\vec{0}\} \subset H \cap B$. Car $\forall F$ sev, $\{\vec{0}\} \subset F$.

. $H \cap B \subset \{\vec{0}\}$

$\forall \vec{x} \in H \cap B \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{x} = \vec{0}$.

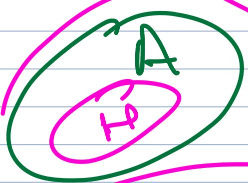
soit $\vec{x} \in H \cap B \iff \begin{cases} x \in H \\ \text{et } x \in B \end{cases}$

or $A = H \oplus A \cap B \Rightarrow H \cap (A \cap B) = \{\vec{0}\}$

or $H \subset A \Rightarrow H \cap A = H$

$\Rightarrow H \cap B = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \vec{x} = \{\vec{0}\}$



$H \cap A = H$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow H \cap B = \{\vec{0}\}$

2ème méthod (2nd method)

$\begin{cases} H \cap B \subset A \cap B & (H \subset A) \\ H \cap B \subset H \end{cases}$

$\Rightarrow H \cap B \subset H \cap (A \cap B)$

$\Rightarrow H \cap B \subset H \cap \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow H \cap B \subset \{\vec{0}\}$

(c) Montrons que $A + B = H + B$.

on a $H \subset A$ $\quad$ ($A = H \oplus A \cap B$
$\Rightarrow H \subset A$)

$\Rightarrow$ $H + B \subset A + B$

($\forall \vec{z} \in H + B$, $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} \in H$ ~~and~~ et $\vec{w} \in B$

avec $\vec{v} \in A$ et $\vec{w} \in B$

$\Rightarrow \vec{z} = (\vec{v} \in A) + (\vec{w} \in B)$

$\Rightarrow \vec{z} \in A + B$.)

Il reste à montrer que $A + B \subset H + B$

soit $\vec{x} \in A + B$

$\Rightarrow \exists \vec{a} \in A$ et $\exists \vec{b} \in B$ tq tel que $\vec{x} = \underbrace{\vec{a}}_{\in A} + \underbrace{\vec{b}}_{\in B}$

or $A = H \oplus A \cap B$

$\Rightarrow \exists! \vec{h} \in H$ et $\vec{v} \in A \cap B$ tq $\vec{a} = \vec{h} + \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\vec{h}}_{\in H} + \underbrace{\vec{v}}_{\in A \cap B} + \underbrace{\vec{b}}_{\in B}$ $\quad$ or $A \cap B \subset B$
$\Rightarrow \vec{v} + \vec{b} \in B$.

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{h} + \underbrace{\vec{w}}_{\vec{v} + \vec{b}}$ avec $\vec{w} \in B$.

$\Rightarrow \vec{x} \in H + B$.

On conclut que $A + B = H + B$.

d) $A + B \overset{?}{=} H \oplus B$

D'après 2) c) on a $A + B = H + B$

$$\text{or } \begin{cases} H \cap B = \{\vec{0}\} \\ \text{et } A+B = H+B \end{cases} \quad (\text{Question } 2°)\ b°)$$

$$\Longleftrightarrow \quad A+B = H \oplus B$$

(Définition de la somme directe)

$$\left(W = T \oplus R \Longleftrightarrow W = T+R \text{ et } T \cap R = \{\vec{0}\} \right)$$

■ ma $A+B = H \oplus B$

$$\Longleftrightarrow \dim(A+B) = \dim(H \oplus B) \quad (\text{prop } 1.2.8 \text{ ②})$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\dim(A+B) = \dim(H) + \dim(B)} \quad (\text{prop } 1.2.8 \text{ ④}) \quad (*)$$

$$\text{or } A = H \oplus A \cap B$$

$$\Longleftrightarrow \dim(A) = \dim(H) + \dim(A \cap B)$$

$$\Longleftrightarrow \dim(H) = \dim(A) - \dim(A \cap B)$$

$$(*) \Longleftrightarrow \dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Chap 2 :

Ex A-2-2. (page 49)

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto f(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$$

① f est une application linéaire.

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ x_4 + y_4)$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = \Big((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4),\ (x_1 + y_1) + 2(x_3 + y_3) - (x_4 + y_4),\ (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) - 3(x_4 + y_4) \Big)$$

$$= \Big(x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \Big)$$

$+$

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 + y_4 , \\ y_1 + 2y_2 - y_4 , \\ y_1 + y_2 + 3y_3 - 3y_4 \end{pmatrix}$$

$$= f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(\lambda \vec{x}) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$= \lambda f(\vec{x})$$

Donc f est linéaire.

2) Base de $\operatorname{Ker} f$?

$$\operatorname{Ker} f = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \}$$

$\mathbb{R}_q$ $\operatorname{Ker} f$ sev de $\mathbb{R}^4$

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (L_1) \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 & (L_2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 & (L_3) \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (L'_1) \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & (L_2) \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 & (L_3) \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

$(L_3) \leftarrow \frac{1}{2} L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 - x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= (-2x_3 + x_4, -x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$$

$$= x_3 \underbrace{(-2, -1, 1, 0)}_{\vec{v_1}} + x_4 \underbrace{(1, 2, 0, 1)}_{\vec{v_2}}$$

$$= x_3 \vec{v_1} + x_4 \vec{v_2}$$

Cl $\forall \vec{x} \in \operatorname{Ker} f$

$\vec{x} = x_3\vec{v}_1 + x_4\vec{v}_2, \quad x_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est génératrice de Ker f.

Montrons que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre

Soient $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow \lambda_1(-2,-1,1,0) + \lambda_2(1,2,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ libre et génératrice de $\operatorname{Ker} f$

donc c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

③ $\operatorname{Im} f$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4, \ \vec{y} = f(\vec{x}) \right\}$$

$$\vec{y} \in \operatorname{Im} f \iff \begin{cases} y = f(\vec{x}) \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \\ \exists \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ \vec{y} = f(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (L_1) \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = y_2 & (L_2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = y_3 & (L_3) \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 inconnues

$$\begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ 2(\underbrace{x_2 + x_3 - 2x_4}_{y_2 - y_1}) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ 2(y_2 - y_1) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

c/

$$\vec{y} \in \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ (S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \end{cases} \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

justifier

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \\ (S') \quad y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$

on justifie l'équivalence par double implications.

"$\Rightarrow$" $(S) \Longrightarrow (S')$ (trivial)

"$\Leftarrow$" $(S') \Longrightarrow (S)$

soit $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

Alors il existe $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

tel que $x_3 = x_4 = 0$

et $x_2 = y_2 - y_1$; $x_1 = y_2$

qui vérifie le système (S).

donc $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Ainsi

$$\vec{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \vec{y} = y_1 \underbrace{(2,1,0)} + y_3 \underbrace{(-1,0,1)}$$

$$y_1 \ \vec{w}_1 + y_3 \ \vec{w}_2$$

$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$

on a $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ génératrice.

On vérifie aussi que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre.

donc $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$

(4) on a $\dim \operatorname{Im} f = 2$

et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

$$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 4$$