TD N°3 - G1004 — 11 septembre

Exercice A.2.12 (page 132)

$E = \{\text{polynôme } p \text{ de degré} \leq 3\}$

$\forall p \in E$, $\exists\, a_0, a_1, a_2, a_3$ scalaires tq

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, p(t) = a_0 1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3}$

Soient $q_0(t) = 1$; $q_1(t) = t$; $q_2(t) = t^2$; $q_3(t) = t^3$

$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est la base canonique de E

Donc $\dim(E) = 4$

① $\forall t \in \mathbb{R}$, $p_0(t) = 1$; $p_1(t) = t$

$p_2(t) = t(t-1)$; $p_3(t) = t(t-1)(t-2)$

Montrons $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base de E.

(Proposition 1.2.7 ①)

On a $\text{card}(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 4 = \dim(E)$

il suffit de montrer que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

← polynôme nul

$0(t) = 0$ réel, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lambda_0 p_0(t) + \lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = 0(t), \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 (t^2 - t) + \lambda_3 (t^2 - t)(t-2) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$t^3 - 2t^2 - t^2 + 2t$

$= t^3 - 3t^2 + 2t$

$q_0(t)$ $q_1(t)$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 (t^2 - t) + \lambda_3 (t^3 - 3t^2 + 2t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$q_2(t)$ $q_1(t)$ $q_3(t)$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 (q_2 - q_1) + \lambda_3 (q_3 - 3q_2 + 2q_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 q_0 + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) q_1 + (\lambda_2 - 3\lambda_3) q_2 + \lambda_3 q_3 = 0$$

Or $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est libre

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Alors $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est libre

et $\mathrm{Card}(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 4 = \dim(E)$

Alors $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base.

(2) soit $p(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d\, 1$

$\mathcal{B}_c = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ base canonique d'E

- d, c, b et a sont les coordonnées de p dans $\mathcal{B}_c$

$p = a q_3 + b q_2 + c q_1 + d q_0$

$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$

Proposition 1.2.6

$p = \alpha_3 p_3 + \alpha_2 p_2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_0 p_0$

$\alpha_0 = ?$ $\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$ et $\alpha_3 ?$

$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont uniques et sont les ~~car~~ coordonnées de p dans $\mathcal{B}$.

Question:

Exprimer (explicit) α_0, α_1, α_2 et α_3 en fonction de d, c, b et a

$$\mathcal{B}_C \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

on a

$$P = P$$

$$\Leftrightarrow \quad a q_3 + b q_2 + c q_1 + d q_0 = \alpha_3 p_3 + \alpha_2 p_2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_0 p_0$$

Or $p_0 = q_0$; $p_1 = q_1$; $p_2 = q_2 - q_1$; $p_3 = q_3 - 3q_2 + 2q_1$

$$\Leftrightarrow \quad a q_3 + b q_2 + c q_1 + d q_0 = \alpha_3 (q_3 - 3q_2 + 2q_1) + \alpha_2 (q_2 - q_1) + \alpha_1 q_1 + \alpha_0 q_0$$

$$\Leftrightarrow \quad d q_0 + c q_1 + b q_2 + a q_3 = \alpha_0 q_0 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) q_1 + (\alpha_2 - 3\alpha_3) q_2 + \alpha_3 q_3$$

$$\Leftrightarrow \quad (d - \alpha_0) q_0 + (c - \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) q_1 + (b - \alpha_2 + 3\alpha_3) q_2 + (a - \alpha_3) q_3 = 0$$

un polynôme nul.

$$\Rightarrow \begin{cases} d - \alpha_0 = 0 \\ c - \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ b - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ a - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

puisque « because » $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ~~est~~ est libre

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_3 = a \\ \alpha_2 = b + 3a \\ \alpha_1 = c + b + 3a - 2a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 = c + b - a \\ \alpha_2 = b + 3a \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

Exercice A-2.16

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$

■ $\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle \overset{?}{\Longrightarrow} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée

on a $\vec{v}_2 \in \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ $\left(\vec{v}_2 = 0\,\vec{v}_1 + 1\,\vec{v}_2 \right)$

$\Rightarrow \vec{v}_2 \in \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$ $\left(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle \right)$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_3$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ famille liée. (Definition 1.2.4)

■ Est ce que la réciproque est exacte?
"Does"

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée $\overset{?}{\Longrightarrow} \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$

Supposons que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est liée (Prop 1.2.1. (1))

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée (Prop 1.2.2. (1))

Supposons $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre. Alors $\quad \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_1 = (\alpha+\beta)\vec{v}_1$

$$\dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle) = \dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle) = \dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1 \rangle) = 1.$$

$$\dim(\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle) = \dim(\text{vect}\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle) = 2$$

car $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice et libre de vect$(<\vec{v_2}, \vec{v_3}>)$

Alors $\dim \text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_2}> = 1 \neq 2 = \dim(\text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_3}>)$

$\Rightarrow \dim \text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_2}> \neq \dim(\text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_3}>)$

$\Rightarrow \text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_2}> \neq \text{vect}<\vec{v_1}, \vec{v_3}>$.

(Proposition 1.2.8, 2)
$E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$

($\dim E \neq \dim F \Leftarrow E \neq F$)

Exercice A.2.19 (page 34)

E : espace vectoriel

A, B : sous-espace vectoriels.

1 $A \cap B = \{\vec{0}\}$, $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_p}\}$ base de A

$\{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_q}\}$ base de B.

2 $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_p}\} \cup \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_q}\}$ est une base de $A \oplus B$.

- $\dim(A \oplus B)$ = ~~[illegible]~~ inconnu (unknown)
- base = génératrice ~~et~~ libre

$\forall \vec{x} \in A \oplus B \Leftrightarrow \exists! \, \vec{a} \in A$ et $\vec{b} \in B$; $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

Proposition 1.1.8

$\mathcal{F} = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_p}\} \cup \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_q}\}$

2 $\mathcal{F}$ est génératrice de $A \oplus B$.

Soit $\vec{x} \in A \oplus B \Leftrightarrow \exists! \, \vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ tq.
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

or $\left\{\begin{array}{l}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \text{ est une base } A \\ \vec{a} \in A\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow$ $\exists !\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ scalaires tels que

proposition 1.2.6 $\quad \vec{a} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{a}_i$ (~~unique~~ décomposition unique)

De même $\quad \exists !\, \beta_1, \dots, \beta_q,\ \vec{b} = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{b}_j$

Alors

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{a}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{b}_j$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ est génératrice de $A \oplus B$.

■ $\underline{\mathcal{F} \text{ est libre}}$:

Soit $\boxed{\gamma_1 \vec{a}_1 + \gamma_2 \vec{a}_2 + \dots + \gamma_p \vec{a}_p + \theta_1 \vec{b}_1 + \theta_2 \vec{b}_2 + \dots + \theta_q \vec{b}_q = \vec{0}}$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p = 0$

et $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_q = 0$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\gamma_1 \vec{a}_1 + \dots + \gamma_p \vec{a}_p}_{\vec{z}} = \underbrace{-(\theta_1 \vec{b}_1 + \dots + \theta_q \vec{b}_q)}_{\vec{z}\,'}$

$\Longleftrightarrow$

$\vec{z} = \vec{z}\,'$

$\left\{\begin{array}{l}\vec{z} \in A \\ \vec{z}\,' \in B\end{array}\right. \Longrightarrow \vec{z} \in A \cap B \quad A \cap B = \{\vec{0}\}$

et $\vec{z} \in A \cap B$

$\Rightarrow \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \gamma_1 \vec{a}_1 + \dots + \gamma_p \vec{a}_p = \vec{0}$

et $\vec{z}' = \vec{0}$ et $\theta_1 \vec{b}_1 + \dots + \theta_q \vec{b}_q = \vec{0}$

donc $\mathcal{F} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$ est libre

et génératrice de $A \oplus B$ donc base de $A \oplus B$.

(b) $\dim(A \oplus B) \overset{?}{=} \dim(A) + \dim(B)$

D'après ("from") 1) (a) on a $\mathcal{F} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$

est une base de $A \oplus B$

$\Rightarrow \dim(A \oplus B) = \text{Card}(\mathcal{F}) = p + q$

$\Rightarrow \dim(A \oplus B) = p + q$

or $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ est une base de A

$\Rightarrow \dim(A) = \text{Card}(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}) = p$

et $\dim(B) = \text{Card}(\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}) = q$

$\Rightarrow \dim(A \oplus B) = \underbrace{\dim(A)}_{p} + \underbrace{\dim B}_{q}$

(2) On ne suppose plus (not suppose) que $A \cap B = \{\vec{0}\}$

sev de E $=$ $A \cap B \neq \{\vec{0}\}$

H est un supplémentaire dans A de $A \cap B$

$A = H \oplus A \cap B$

$A = H \oplus A \cap B$

ⓐ Montrons que $A \cap B$ est un s-e-v de E

on a $\left.\begin{array}{l} A \text{ sev de } E \\ B \text{ sev de } E \end{array}\right\} \Longrightarrow A \cap B$ est un sev de E (~~...~~ Voir Prop 1.1.6)

ⓑ $\underbrace{H \cap B = \{\vec{0}\}}$ Rq $W = V \Leftrightarrow W \subset V$ et $V \subset W$

$\{\vec{0}\} \subset H \cap B$ puisque $H \cap B$ est un sev ($\forall F$ sev de E $\{\vec{0}\} \subset F$ (Prop. 1.1.5)

~~#~~ Il reste à montrer que $H \cap B \subset \{\vec{0}\}$

$\forall \vec{x} \in H \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \in H \\ \vec{x} \in B \end{cases}$

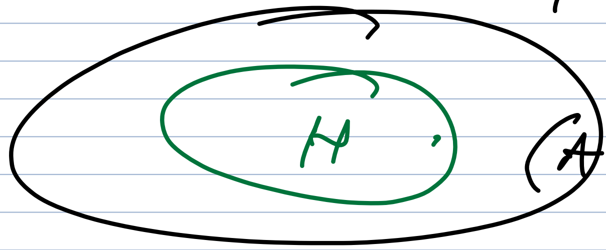
or $A = H \oplus A \cap B \Longrightarrow H \subset A$ (puisque $\forall \vec{h} \in H$, $\vec{h} = \underset{\in H}{\vec{h}} + \underset{\in A \cap B}{\vec{0}}$ $\Rightarrow \vec{h} \in A$)

~~#~~ D'autre part ("In other hand")

$A = H \oplus A \cap B \Longrightarrow H \cap (A \cap B) = \{\vec{0}\}$

($T = W \oplus V \Leftrightarrow T = W + V$ et $W \cap V = \{\vec{0}\}$ Définition)

Mais (But) $H \cap A \cap B = H \cap B$ parce que $H \subset A$



$H \cap A = H$

Alors $H \cap (A \cap B) = H \cap B = \{\vec{0}\}$

Alors $\vec{x} \in H \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \in H \\ \text{et } \vec{x} \in B \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

• ⓒ Montrons que $A + B = H + B$.

on a $H \subset A \Rightarrow H + B \subset A + B$:

$\forall \vec{z} \in H+B$; $\vec{z} = \underset{\in A}{\vec{h}} + \underset{B}{\vec{b}}$, $\vec{h} \in H \subset A$

$\Rightarrow \vec{z} \in A+B$

$A + B \subset H + B$?

$\forall \vec{x} \in A+B \Leftrightarrow \exists \vec{a} \in A, \exists \vec{b} \in B$ tel que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

or $A = H \oplus A \cap B$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{h} + \vec{v}$, $\vec{h} \in H$ et $\vec{v} \in A \cap B$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{h} + \vec{v} + \vec{b}$ avec $\vec{h} \in H$, $\vec{v} \in A \cap B$

$\vec{b} \in B.$

or $A \cap B \subset B$

$\Rightarrow \vec{v} \in B$

Alors $\vec{x} = \underbrace{\vec{h}}_{\in H} + \underbrace{\vec{v} + \vec{b}}_{\in B}$

$\left\{ \begin{array}{l} B \text{ sev} \\ \vec{v} \in B \\ \vec{b} \in B \end{array} \right.$

$\Rightarrow \vec{v} + \vec{b} \in B$

$\Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\vec{h}}_{\in H} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\in B},$

$\Rightarrow \vec{x} \in H + B.$

Donc $A + B = H + B$ ⌟

(d) $A + B = H \oplus B$

On a d'après (2) (c) on a $A + B = H + B$

and 2°) b) on a $H \cap B = \{\vec{0}\}$

Donc par définition de la somme directe on a

$$A + B = H \oplus B.$$

on a $A + B = H \oplus B$

$$\Longleftrightarrow \quad \dim(A+B) = \dim(H) + \dim(B)$$

(prop 1.2.8 (2))

or $\quad A = H \oplus A\cap B$

$$\Leftrightarrow \quad \dim(A) = \dim(H) + \dim(A\cap B)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dim(H) = \dim(A) - \dim(A\cap B)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A\cap B).$$

Chap 2 :

Exercice A.2.2 (page 49)

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, \; x_1 + 2x_3 - x_4, \; x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$$

① Montrons que f est linéaire.

- $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{x}' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}')$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4,$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

$\vec{x} + \vec{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3', x_4 + x_4') \in \mathbb{R}^4$

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = \big((x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') + (x_3 + x_3') + (x_4 + x_4')$$

$(x_1+x_1') + 2(x_3+x_3') - (x_4+x_4')$ /

$(x_1+x_1') + (x_2+x_2') + 3(x_3+x_3') - 3(x_4+x_4')$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4, \\ x_1 + 2x_3 - x_4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' - x_2' + x_3' + x_4', \\ x_1' + 2x_3' - x_4' \\ x_1' + x_2' + 3x_3' - 3x_4' \end{pmatrix}$$

$$= f(\vec{x}) + f(\vec{x}')$$

$$f(\lambda\vec{x})$$

$$= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

$$= (\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4,$$
$$\lambda x_1 - \lambda x_4 + 2\lambda x_3,$$
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + 3\lambda x_3 - 3\lambda x_4)$$

$= \ldots$

$= \lambda f(\vec{x})$

Donc f est linéaire

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

(2) Rq

$\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (L_1) \\ x_1 \quad + 2x_3 - x_4 = 0 & (L_2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (L_1') \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & (L_2') \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 & (L_3') \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$(L_3') \leftarrow \frac{1}{2}(L_3')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 - x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Alors

$$\vec{x} = (-2x_3 + x_4, -x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$$

$$= (-2x_3, -x_3, x_3, 0) + (x_4, 2x_4, 0, x_4)$$

$$= x_3 \underbrace{(-2, -1, 1, 0)} + x_4 \underbrace{(1, 2, 0, 1)}$$

$\forall \vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ /

$\vec{x} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

v_1 $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ v_2

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

Ker f est engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une famille génératrice de Ker f.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ /

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow \lambda_1(-2,-1,0,0) + \lambda_2(1,2,0,1) = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre + génératrice

donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base de Ker f

$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

(3) $\operatorname{Im} f = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4 ; \vec{y} = f(\vec{x}) \}$

ser de $\mathbb{R}^3$

$\vec{y} \in \operatorname{Im} f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \exists \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ f(\vec{x}) = \vec{y} \end{cases}$$

second membre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \\ \vec{x} = (x_1, -, x_4) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \quad (L_1) \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = y_2 \quad (L_2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = y_3 \quad (L_3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ 2(\underbrace{x_2 + x_3 - 2x_4}_{y_2 - y_1}) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_3 - y_1 \\ 2(y_2 - y_1) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

d/

$$\vec{y} \in \operatorname{Im} f \iff \begin{cases} \exists\, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ (S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = y_2 - y_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

justifier

$$\iff (S') \begin{cases} \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$(S) \iff (S')$

on justifie l'équivalence par double implications :

"$\Rightarrow$" $(S) \Rightarrow (S')$ (trivial)

"$\Leftarrow$" $(S') \Rightarrow (S)$

Soit $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

Alors il existe $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

tel que $x_3 = x_4 = 0$

et $x_2 = y_2 - y_1$; $x_1 = y_2$

qui vérifie le système (S).

donc $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Ainsi

$\vec{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \vec{y} = y_1 \underbrace{(2,1,0)}_{\vec{w}_1} + y_3 \underbrace{(-1,0,1)}_{\vec{w}_2}$

$= y_1 \vec{w}_1 + y_3 \vec{w}_2$

$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{vect} \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$

on a $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ génératrice.

On vérifie aussi que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre.

donc $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$

(4) on a $\dim \operatorname{Im} f = 2$

et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

$$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 4$$