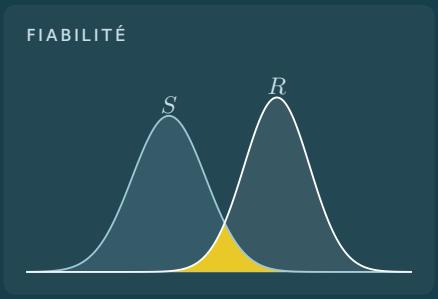
Université de Technologie de Compiègne

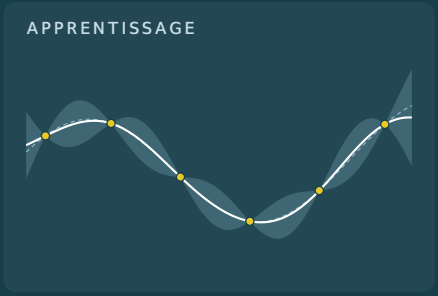
MASTER SMC

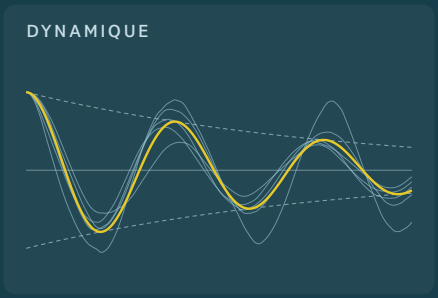
Structures et Systèmes Mécaniques Complexes (SMC)

Modélisation stochastique en mécanique

Fiabilité, Apprentissage et Dynamique







Mokhtar Z. Alaya • Salim Bouzebda

Version 2026

CHAPITRE

1 Fiabilité et dimensionnement des structures

Situation mécanique

Une barre et une poutre doivent supporter des charges variables. Le calcul de résistance devient une décision sous incertitude : quelles combinaisons provoquent un dépassement, et comment la dépendance des charges modifie-t-elle la réponse ?

But du chapitre. Passer d'un état limite scalaire à une structure sous charges corrélées, calculer des moments et une probabilité de défaillance, puis discuter la précision du résultat.

Le raisonnement qui organise ce chapitre. Nous commençons par une barre, car une seule marge $R - S$ suffit à décrire le critère retenu. Il faudra comprendre successivement ce que représente une réalisation, comment traduire une rupture en événement et comment calculer sa probabilité. Nous passerons ensuite à la poutre : les deux charges sont dépendantes, plusieurs sections doivent être vérifiées et la covariance devient un outil mécanique. Les deux situations suivent le même chemin : *équilibre, variables aléatoires, réponse, décision*. Monte-Carlo intervient lorsque l'intégrale de probabilité devient difficile ; il ne remplace ni l'équilibre ni le choix du mécanisme de défaillance.

1.1 Partie A — Résistance–sollicitation et fiabilité

Situation mécanique

Une barre de suspension doit reprendre une traction variable. Deux pièces de même plan peuvent avoir des limites de résistance différentes, et deux utilisations peuvent imposer des efforts différents. Pour une section A_s fixée, la sollicitation en contrainte vaut $S = F/A_s$, tandis que R représente ici la contrainte de résistance. Une vérification à la force moyenne peut être satisfaisante alors que certaines combinaisons de charge élevée et de résistance faible provoquent la rupture. Quelle probabilité de défaillance associer à une section donnée ?

Objectif de cette partie

Définir un événement de rupture, calculer une probabilité simple, construire un estimateur Monte-Carlo et qualifier sa précision.

Quand utiliser cette partie ? Pour une vérification statique, une épreuve de résistance ou une comparaison de dimensionnements sous variabilité. On commence par choisir le mode de ruine : dépassement de contrainte, déplacement excessif ou flambement ne donnent pas la même fonction

d'état limite. Le calcul présenté porte sur une épreuve ; une durée de vie en fatigue exige en plus un historique de chargement et une loi d'endommagement.

La figure 1.1 précise quelles grandeurs décrivent la pièce, les sollicitations et le critère de défaillance. Avant de tirer des nombres aléatoires, il faut choisir ce mécanisme mécanique.

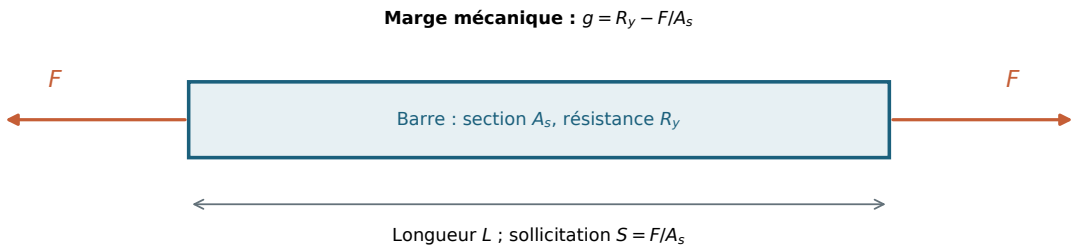


Figure 1.1 De la pièce à l'état limite. Une barre droite de section constante A_s est soumise à deux efforts de traction opposés de même intensité F. Dans le modèle uniaxial uniforme, la contrainte vaut F/A_s ; la limite matériau R_y est la résistance notée R dans le texte. L'événement $g = R_y - F/A_s \leq 0$ représente le dépassement de cette limite, sans modéliser la propagation ultérieure d'une fissure. La section est ici un choix de dimensionnement déterministe ; F et R_y varient entre épreuves. La longueur L intervient dans l'allongement, mais pas dans cet état limite en contrainte.

1.1.1 Du modèle mécanique à la variable aléatoire

1.1.1.1 Définir l'expérience avant de choisir une loi

Une variable aléatoire n'est pas seulement un nombre auquel on ajoute du bruit. Elle représente une grandeur mesurée lors d'une expérience reproductible : tirer une éprouvette dans un lot, observer une charge pendant une période donnée, ou considérer un ouvrage parmi une population. La population, les conditions d'essai et l'horizon d'observation font partie de la définition du modèle.

Une résistance mesurée sur des éprouvettes d'un même lot n'a pas nécessairement la même dispersion qu'une résistance mesurée entre plusieurs fournisseurs. Une sollicitation maximale annuelle n'a pas la même loi qu'une sollicitation instantanée. Les comparer sans préciser leur sens peut conduire à une probabilité numériquement correcte pour un problème physiquement mal posé.

On distingue la variabilité entre réalisations et l'incertitude sur les paramètres du modèle. Une série de mesures peut servir à estimer une moyenne, mais elle ne supprime pas la dispersion physique. Inversement, considérer une moyenne estimée comme parfaitement connue peut masquer l'incertitude liée à un faible échantillon. Dans les premiers calculs, les paramètres de loi sont supposés connus pour isoler la question de la propagation ; cette hypothèse devra être revisitée lors d'une utilisation sur des données expérimentales.

1.1.1.2 Répartition, densité et moments

Définition 1.1 (Loi, densité et moments).
Pour une variable aléatoire réelle X, la fonction de répartition est $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. La loi admet une densité f_X si $f_X \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_X(u)\mathrm{d}u = 1$ et, pour $a \leq b$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u, \qquad \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(u)\mathrm{d}u.$$

Lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la moyenne et la variance sont

$$m_X = \mathbb{E}[X], \quad s_X^2 = \mathbb{E}[(X - m_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - m_X^2.$$

L'écart-type est $s_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Pour toute fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}[|h(X)|] < \infty$, la formule de transfert donne, si une densité existe, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\mathrm{d}x$. Une densité n'est pas une probabilité : elle peut être supérieure à un et s'exprime dans l'inverse de l'unité de X. Pour une force en N, f_X est en N^{-1} ; une probabilité est sans dimension. L'écart-type s_X a la même unité que X. Pour une moyenne positive, le coefficient de variation $c_X = s_X/m_X$ est sans dimension : il facilite la comparaison de dispersions relatives entre grandeurs mécaniques différentes.

1.1.1.3 Formuler l'état limite

Définition 1.2 (État limite et fiabilité).
Soit $\boldsymbol{X}$ le vecteur des entrées aléatoires d'un modèle mécanique et g une fonction mesurable. Avec la convention retenue dans ce cours, $\{g(\boldsymbol{X}) \leq 0\}$ est l'événement de défaillance et $\{g(\boldsymbol{X}) > 0\}$ l'événement de fonctionnement sûr. Dans le modèle résistance–sollicitation, R et S sont définies sur le même espace probabilisé, dans la même unité, et

$$g(R, S) = R - S, \qquad P_f = \mathbb{P}(g \leq 0), \qquad \mathcal{R} = 1 - P_f. \tag{1.1}$$

La fiabilité $\mathcal{R}$ se rapporte au critère et à l'épreuve ainsi définis.

Proposition 1.3 (Calcul de la probabilité de défaillance).
Si (R, S) admet une densité jointe $f_{R,S}$ et prend ses valeurs dans $[0, \infty)^2$, alors

$$P_f = \int_0^{\infty} \int_0^{s} f_{R,S}(r, s)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

Si R et S sont indépendantes, sans condition de positivité ni d'existence d'une densité, on a

$$P_f = \int F_R(s)\,\mathrm{d}F_S(s). \tag{1.3}$$

L'intégrale est prise par rapport à la loi de S. Si celle-ci admet une densité f_S, elle devient $\int_{\mathbb{R}} F_R(s) f_S(s)\mathrm{d}s$.

1.1.1.4 Pourquoi l'indépendance intervient-elle ?

Démonstration de la proposition 1.3. L'intégration de la densité sur le domaine $0 \leq r \leq s$ donne la première formule. Plus généralement, la formule de l'espérance conditionnelle donne

$$P_f = \int \mathbb{P}(R \leq s \mid S = s)\, \mathrm{d}F_S(s).$$

L'indépendance permet de remplacer la probabilité conditionnelle par $F_R(s)$. La formule (1.3) en résulte, y compris en présence d'atomes. □

> **Remarque 1.4** (Égalité au seuil et dépendance).
> Remplacer $R \leq S$ par $R < S$ conserve la probabilité uniquement si $\mathbb{P}(R = S) = 0$. Les lois marginales seules ne déterminent pas P_f en présence de dépendance. Une dépendance peut apparaître si résistance et charge varient avec la même température. Une corrélation nulle ne garantit pas l'indépendance, sauf dans des cadres particuliers, notamment celui d'un vecteur conjointement gaussien.

1.1.1.5 Choisir l'état limite à partir du mécanisme de ruine

Pour une barre en traction, on peut écrire $g = R_y - F/A_s$, avec R_y la résistance en contrainte. Pour une limitation de déplacement, on choisit $g = u_{\mathrm{adm}} - u_{\max}$. Pour une barre élancée comprimée dans le domaine d'Euler, $g = \pi^2 E_Y I / L_{\mathrm{eff}}^2 - F_c$, où L_{eff} traduit les conditions aux limites. Dans ces trois cas, $g > 0$ décrit le respect du critère, mais les variables influentes et les unités diffèrent.

Le choix n'est donc pas purement statistique. Une augmentation de section peut réduire une contrainte et accroître la rigidité, sans supprimer une incertitude sur les appuis. Avant de calculer une probabilité, identifier le mécanisme physique et le domaine dans lequel sa formule mécanique est valable. Un indicateur de fiabilité associé à un critère ne couvre pas automatiquement les autres modes de défaillance.

1.1.2 Choisir et paramétrer une loi

Nous savons maintenant définir l'événement $R \leq S$. Pour lui attribuer une probabilité, il reste à décrire la fréquence des couples (R, S). Choisir une loi revient à préciser cette information physique. Le calcul suivant montre comment les limites d'intégration se déduisent du support des variables, avant toute utilisation d'une formule particulière.

1.1.2.1 Un premier calcul complet : deux intervalles de contraintes

> **Exemple 1.5** (Deux lois uniformes indépendantes).
> À titre illustratif, prenons $R \sim \mathcal{U}[200, 300]$ MPa et $S \sim \mathcal{U}[150, 250]$ MPa, indépendantes. La marge moyenne vaut $250 - 200 = 50$ MPa. Pour une sollicitation s, on a
>
> $$F_R(s) = \begin{cases} 0, & s < 200, \\ (s - 200)/100, & 200 \leq s \leq 300, \\ 1, & s > 300. \end{cases}$$

Les valeurs sont exprimées en MPa. Seul $200 \le s \le 250$ contribue à la rupture et $f_S = 1/100$ MPa^{-1} sur son support, d'où

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{150}^{250} F_R(s)\frac{\mathrm{d}s}{100} = \int_{200}^{250} \frac{s-200}{10000}\,\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{(s-200)^2}{20000}\right]_{200}^{250} = \frac{50^2}{20000} = 0{,}125. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La région de rupture est un triangle ; le calcul donne une probabilité sans dimension. Une marge moyenne positive n'exclut donc pas le risque de 12,5 %.

Proposition 1.6 (Fiabilité et coefficient de sécurité pour deux lois uniformes).
Soient $R \sim \mathcal{U}[r_1, r_2]$ et $S \sim \mathcal{U}[s_1, s_2]$ indépendantes, exprimées dans la même unité, avec $0 < s_1 < r_1 < s_2 < r_2$. Alors

$$P_f = \mathbb{P}(R \le S) = \frac{(s_2 - r_1)^2}{2(r_2 - r_1)(s_2 - s_1)}, \qquad \tau = \mathbb{E}\left[\frac{R}{S}\right] = \frac{(r_1 + r_2)\log(s_2/s_1)}{2(s_2 - s_1)}.$$

Ces deux grandeurs sont sans dimension. La formule de P_f utilise l'ordre indiqué des bornes ; celle de τ utilise notamment $s_1 > 0$, qui évite une singularité du quotient près de zéro.

Démonstration. Sur le seul intervalle contribuant à la rupture, $r_1 \le s \le s_2$, on a $F_R(s) = (s - r_1)/(r_2 - r_1)$. La proposition 1.3 donne donc

$$P_f = \frac{1}{(r_2 - r_1)(s_2 - s_1)} \int_{r_1}^{s_2} (s - r_1)\,\mathrm{d}s,$$

d'où la première expression. L'indépendance et la positivité de s_1 permettent ensuite de factoriser l'espérance du quotient :

$$\mathbb{E}[R/S] = \mathbb{E}[R]\,\mathbb{E}[1/S] = \frac{r_1 + r_2}{2}\,\frac{1}{s_2 - s_1}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

L'intégrale vaut $\log(s_2/s_1)$, logarithme d'un rapport sans dimension. □

Le coefficient τ fait intervenir $\mathbb{E}[1/S]$, et non $1/\mathbb{E}[S]$. Il ne doit donc pas être remplacé par $\mathbb{E}[R]/\mathbb{E}[S]$. Les exercices 3 du TD 1 et 5 du TD 1 proposent d'appliquer ces expressions puis d'en discuter la portée mécanique.

Même histogramme, autre mécanisme de dépendance. Prenons maintenant une seule variable U uniforme sur $[0, 1]$ et posons $R = 200 + 100U$, $S = 150 + 100U$, en MPa. Chacune des deux lois marginales est inchangée, mais $R - S = 50$ MPa dans toutes les épreuves : $P_f = 0$. Une variation commune déplace ici résistance et sollicitation de la même quantité, sans modifier la marge. Cette construction n'est pas une proposition de modèle pour toute barre ; elle prouve que deux histogrammes séparés ne suffisent pas à décrire un risque lorsque leurs valeurs sont liées.

Revenir aux données et au mécanisme. Les lois ci-dessous sont donc des choix de modèle à discuter, avec leur support, leurs paramètres et la dépendance éventuelle entre variables.

Loi	Usage possible	Point à vérifier
Uniforme	Intervalle borné, sous-intervalles de même longueur équiprobables	La connaissance des bornes ne prouve pas l'équiprobabilité.
Normale	Fluctuations autour d'une moyenne, somme de nombreux effets	Support non borné, possibilité de valeurs négatives.
Lognormale	Grandeur positive, effets multiplicatifs	Asymétrie et comportement de la queue supérieure.
Exponentielle	Temps d'attente à taux constant ; parfois amplitude positive	Pour un temps : absence de vieillissement. Pour une amplitude : écart-type égal à la moyenne.

Le choix dépend des données, du mécanisme physique et de l'événement étudié. Deux lois ayant la même moyenne et la même variance peuvent donner des probabilités de rupture très différentes, car ces probabilités dépendent des queues. Les paramètres doivent aussi être identifiables avec le nombre de mesures disponible.

Les développements suivants donnent un mécanisme, un exemple chiffré et une limite d'emploi pour chacune de ces lois. Les valeurs sont choisies pour l'apprentissage ; elles ne constituent pas des données expérimentales.

1.1.2.2 Loi uniforme : un mécanisme qui ne privilégie aucune zone

Image mécanique. Une force verticale dirigée vers le bas, de valeur fixée $F_0 > 0$, se déplace à vitesse constante le long d'une poutre simplement appuyée. On néglige les effets d'inertie et on observe sa position U à un instant tiré uniformément pendant une traversée complète. Le dispositif passe le même temps dans deux segments de même longueur : ils ont donc la même probabilité de contenir la force au moment de l'observation. Si la portée vaut L, alors $U \sim \mathcal{U}([0, L])$. Ce cas à une force mobile est un exemple illustratif ; les deux positions de charge du fil conducteur restent fixées à 300 et 600 mm.

Ce que signifie « uniforme ». Pour $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, avec $a < b$,

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \qquad \mathbb{P}(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (a \le c \le d \le b).$$

L'équiprobabilité concerne les *intervalles de même longueur*. Chaque valeur isolée a une probabilité nulle, comme pour toute loi à densité. Les paramètres ont une lecture directe :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad s_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Ces formules sont rappelées dans le manuel du NIST, section 1.3.6.6.2 [2].

Du mécanisme à la réponse de la poutre. Avec $L = 1000$ mm, les segments $[100, 300]$ et $[600, 800]$ mm ont chacun une probabilité $200/1000 = 20\,\%$ de contenir la force. L'équilibre donne $R_B = F_0 U/L$. Comme cette transformation est linéaire, la réaction R_B est uniforme sur $[0, F_0]$. Le moment maximal, situé sous la force, vaut en revanche

$$M_{\max} = (F_0 - R_B)U = \frac{F_0 U(L-U)}{L}.$$

Il augmente lorsque la force se rapproche du milieu de la portée, puis diminue : sa loi n'est pas uniforme. Une répartition uniforme de l'entrée ne se transmet donc pas automatiquement à la réponse mécanique.

> **Ce qui justifie la loi, ce qui la remet en question**
> La vitesse constante et l'échantillonnage uniforme du temps expliquent ici la loi de position. Si le dispositif ralentit près d'un appui, il y sera observé plus souvent. De même, une cote spécifiée entre $9{,}9$ et $10{,}1$ mm indique un domaine de conformité, sans dire comment les pièces se répartissent dans ce domaine. Poser une loi uniforme à partir de ces bornes reste une hypothèse à discuter ; elle n'est pas une garantie de prudence pour le risque.

1.1.2.3 Loi normale : des écarts qui s'ajoutent autour d'une valeur nominale

Image mécanique. Une cote usinée peut recevoir plusieurs petites contributions : écart de positionnement, variation de dilatation, défaut de réglage. Après une approximation locale, on écrit

$$d = d_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p.$$

Lorsque beaucoup de contributions indépendantes, de variances finies, s'additionnent sans qu'une seule domine, un argument de limite centrale peut rendre plausible une forme approximativement gaussienne. Ce mécanisme est à distinguer d'un résultat exact : si les contributions sont conjointement gaussiennes, leur somme est exactement gaussienne. Une dérive commune, un effet dominant ou un mélange de plusieurs procédés demande une analyse propre. Le rôle de la limite centrale est présenté dans NIST/SEMATECH [2, section 1.3.6.6.1].

Lire les paramètres dans un exemple. Prenons $d_0 = 10$ mm et trois erreurs indépendantes, centrées, supposées gaussiennes, d'écarts-types $0{,}02$, $0{,}03$ et $0{,}04$ mm. Alors

$$\mathbb{E}[d] = 10 \text{ mm}, \qquad s_d = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}03^2 + 0{,}04^2} \simeq 0{,}05385 \text{ mm}.$$

Les écarts-types ne s'ajoutent pas ; ce sont les variances qui s'additionnent sous l'hypothèse d'indépendance. Dans ce modèle, la proportion de pièces dans la tolérance $10 \pm 0{,}1$ mm est

$$\mathbb{P}(|d - 10| \le 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{s_d}\right) - 1 \simeq 93{,}7\,\%,$$

où toutes les longueurs du rapport sont exprimées en mm et Φ désigne la fonction de répartition normale centrée réduite. Si seules les pièces conformes sont conservées, leur loi est la loi conditionnelle sur cet intervalle : ici une normale tronquée. Le tri ne rend pas les diamètres uniformes dans la tolérance.

Ce qui se transmet à la poutre. Lorsque le vecteur des charges (Y_1, Y_2) est *conjointement gaussien*, le moment $M_1 = 210Y_1 + 120Y_2$ est gaussien : les effets mécaniques se superposent linéairement. En revanche, la contrainte $\max(|M_1|, |M_2|)/W$ n'est généralement pas gaussienne, car elle utilise des valeurs absolues et un maximum. Une erreur de capteur gaussienne ne prouve pas non plus que la charge réelle suit une loi normale.

> **La symétrie est une hypothèse physique**
> Une normale place la même probabilité de part et d'autre de sa moyenne à des écarts opposés, et son support est toute la droite réelle. Pour une grandeur strictement positive de moyenne m et d'écart-type s, elle attribue la probabilité $\Phi(-m/s)$ aux valeurs négatives. Si $m/s = 2$, cette probabilité vaut environ $2{,}3\,\%$, ce qui signale un problème de modèle. Même lorsque cette masse est très faible, un bon ajustement au centre ne garantit pas la précision dans la queue de rupture.

1.1.2.4 Loi lognormale : des facteurs relatifs qui se multiplient

Image mécanique. Une correction relative agit proportionnellement à la grandeur présente : un facteur $1{,}1$ ajoute 20 MPa à une résistance de 200 MPa, et 40 MPa à une résistance de 400 MPa. Un modèle possible pour cumuler des influences relatives positives est

$$R = R_{\mathrm{ref}} \prod_{j=1}^{p} G_j, \qquad G_j > 0, \qquad \log\left(\frac{R}{R_{\mathrm{ref}}}\right) = \sum_{j=1}^{p} \log G_j.$$

Les facteurs G_j sont sans dimension. Le logarithme transforme les produits en sommes : si cette somme est gaussienne, R est lognormale. Une accumulation de petits effets sur l'échelle logarithmique peut aussi motiver une approximation, sous des conditions adaptées de dépendance et de dispersion. L'argument multiplicatif est discuté dans NIST/SEMATECH [2, section 8.2.1.3].

Un lien direct avec la traction. Pour une force positive F et une aire de section positive $\mathcal{A}$, la sollicitation vaut $S = F/\mathcal{A}$. En choisissant des références F_{ref} et $\mathcal{A}_{\mathrm{ref}}$ et en posant $S_{\mathrm{ref}} = F_{\mathrm{ref}}/\mathcal{A}_{\mathrm{ref}}$, on obtient

$$\log\left(\frac{S}{S_{\mathrm{ref}}}\right) = \log\left(\frac{F}{F_{\mathrm{ref}}}\right) - \log\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_{\mathrm{ref}}}\right).$$

Si les deux logarithmes sont conjointement gaussiens, cette sollicitation est exactement lognormale. Pour une section circulaire $\mathcal{A} = \pi d^2/4$, une variation relative du diamètre intervient avec un facteur 2 sur l'échelle logarithmique. La positivité et la forme de la relation mécanique sont ainsi conservées dans ce modèle.

La symétrie se lit sur une échelle de rapports. Considérons l'exemple illustratif

$$R = (300\ \mathrm{MPa})e^{0{,}2Z}, \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

La médiane est 300 MPa : une moitié des résistances est en dessous, l'autre au-dessus. La moyenne est un peu plus élevée, $300e^{0{,}02} \simeq 306{,}1$ MPa, en raison de l'asymétrie. L'intervalle central d'environ 95 % vaut

$$\left[300e^{-1{,}96\times 0{,}2},\ 300e^{1{,}96\times 0{,}2}\right] \simeq [202{,}7,\ 444{,}0]\ \mathrm{MPa}.$$

Les bornes se déduisent de la médiane par deux facteurs réciproques ; elles ne correspondent pas à deux écarts absolus opposés. Le paramétrage général par moyenne et coefficient de variation sera établi dans la proposition 1.7.

> **La positivité ne suffit pas à choisir une lognormale**
>
> Une grandeur positive peut suivre bien d'autres lois. Il faut discuter les facteurs physiques, les données et les probabilités près du seuil utile. Une grande charge est défavorable, tandis qu'une faible résistance l'est aussi : l'effet sur le risque dépend de la queue concernée. Enfin, une somme ou un maximum de grandeurs lognormales n'est généralement pas lognormal. La loi d'une réponse doit être propagée à travers sa formule mécanique, même lorsque les entrées sont bien décrites.

1.1.2.5 Loi exponentielle : attendre un événement à taux constant

Image mécanique. Considérons la durée T de fonctionnement d'une pompe avant une panne accidentelle, dans des conditions de service stables. Le modèle suppose qu'une pompe encore en état de fonctionner rencontre le même risque à court terme quel que soit son âge. Il représente par exemple une idéalisation de chocs accidentels, lorsque l'usure accumulée est négligée sur la période étudiée.

Donner un sens au taux avant d'écrire la loi. On suppose que T est strictement positive et admet une densité. Un taux de panne constant $\lambda > 0$ signifie, pour une petite durée h,

$$\mathbb{P}(t < T \leq t + h \mid T > t) = \lambda h + o(h).$$

Le conditionnement est essentiel : on considère les composants encore en fonctionnement à l'instant t. Si le temps est en heures, λ est en h^{-1} ; c'est un taux et non une probabilité. Avec $\mathcal{R}(t) = \mathbb{P}(T > t)$, cette hypothèse donne $\mathcal{R}(t + h) = \mathcal{R}(t)(1 - \lambda h + o(h))$. Ainsi $\mathcal{R}'(t) = -\lambda \mathcal{R}(t)$ et $\mathcal{R}(0) = 1$, d'où

$$\mathcal{R}(t) = e^{-\lambda t}, \qquad f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0), \qquad \mathbb{E}[T] = s_T = \frac{1}{\lambda}.$$

Cette lecture par le taux conditionnel est celle du manuel du NIST, sections 8.1.2.3 et 8.1.6.1 [2].

Comprendre l'absence de mémoire. Pour $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(T > s + t \mid T > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t).$$

Dans ce modèle, avoir déjà fonctionné s heures ne change pas la loi du temps restant avant panne. Cela exprime une hypothèse sur le mécanisme, qui devient inadaptée si le risque croît avec l'usure ou dépend d'un endommagement accumulé.

Un exemple relié à la maintenance du chapitre 4. Prenons $\lambda = 0{,}002\ \mathrm{h}^{-1}$. La durée moyenne vaut 500 h et

$$\mathbb{P}(T \leq 100) = 1 - e^{-0{,}2} \simeq 18{,}1\,\%.$$

Une pompe qui a déjà fonctionné 300 h sans panne a encore une probabilité de $18{,}1\,\%$ de tomber en panne dans les 100 h suivantes. La moyenne de 500 h n'est pas une échéance : la probabilité de dépasser 500 h vaut $e^{-1} \simeq 36{,}8\,\%$. Une durée de réparation exponentielle de taux μ relève d'une autre hypothèse : le taux de fin de réparation est constant. Avec $\mu = 0{,}02\ \mathrm{h}^{-1}$, la durée moyenne de réparation vaut 50 h.

> **Une densité décroissante et un taux constant**
>
> La densité $f_T(t)$ diminue parce que la population initiale compte de moins en moins de composants survivants. Parmi ceux qui fonctionnent encore, le taux conditionnel reste $f_T(t)/\mathcal{R}(t) = \lambda$. La probabilité de panne dans une durée supplémentaire h vaut exactement $1 - e^{-\lambda h}$; l'approximation λh demande $\lambda h \ll 1$. Des durées individuelles exponentielles préparent les chaînes de Markov du chapitre 4, mais le temps de première panne d'un système réparable à plusieurs composants n'est généralement pas exponentiel.

Au chapitre 3, l'exponentielle décrit aussi une amplitude. Pour la console, $q(s) = Y$ signifie que l'intensité est uniforme *dans l'espace*, tandis que sa valeur varie d'une réalisation à l'autre. Le choix $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ représente ici beaucoup de petites amplitudes positives et quelques amplitudes plus élevées. Il impose un écart-type égal à la moyenne, donc un coefficient de variation égal à 1. L'absence de vieillissement ne fournit aucune justification physique à cette loi de charge : sa pertinence doit être examinée sur les amplitudes observées.

Par exemple, si $\mathbb{E}[Y] = 100$ N/m, alors $\lambda = 0{,}01$ m/N et $\mathbb{P}(Y > 300\ \mathrm{N/m}) = e^{-3} \simeq 4{,}98\,\%$. Le paramètre possède l'unité inverse d'une intensité de charge, et non l'unité inverse d'un temps. Une charge spatialement uniforme peut donc avoir une amplitude exponentielle, lognormale ou d'une autre loi : la forme spatiale et la loi de l'amplitude répondent à deux questions distinctes.

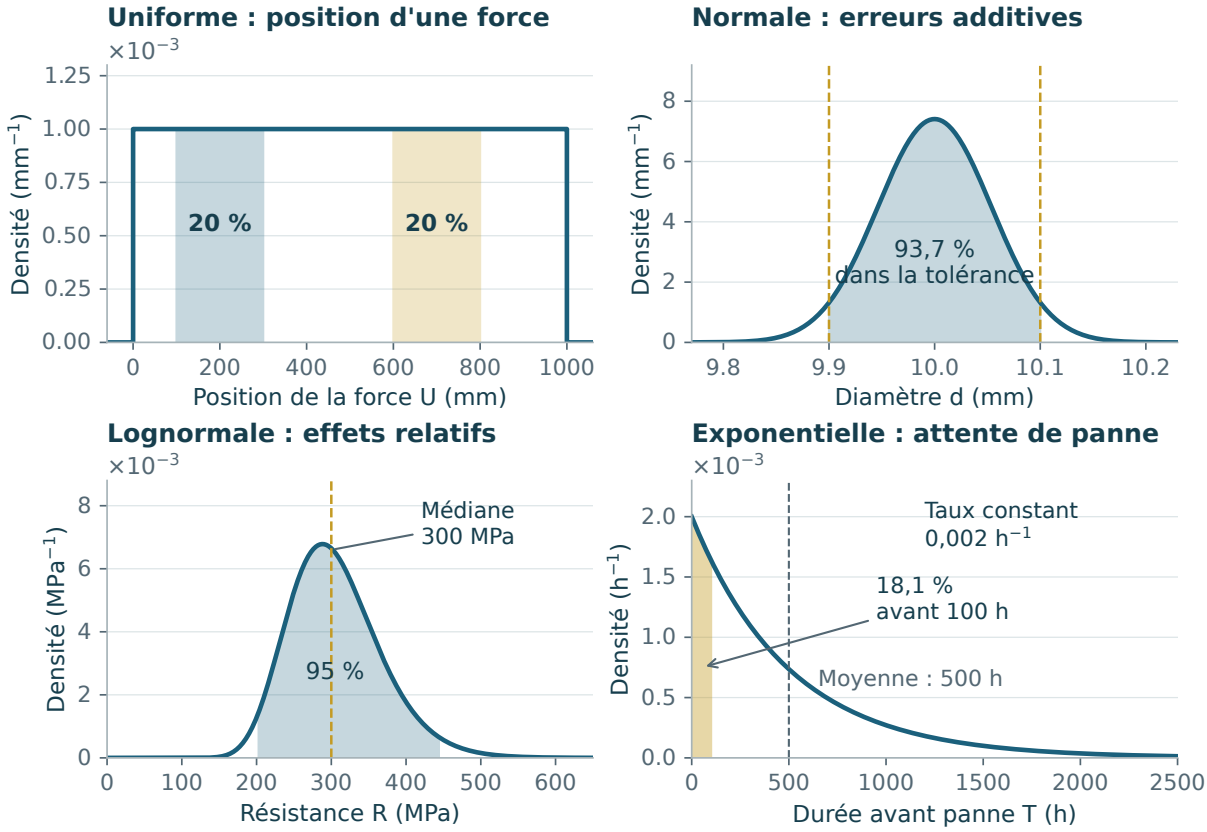


Figure 1.2 **Lire la forme d'une loi à partir de la grandeur modélisée.** Les densités correspondent aux exemples illustratifs du texte : position d'une force mobile, diamètre issu d'erreurs additives, résistance lognormale et durée avant panne à taux constant. Les aires colorées représentent les probabilités indiquées. Les unités de densité sont l'inverse de celles de la variable ; seule l'aire sous la courbe est une probabilité. Les paramètres sont pédagogiques et ne proviennent pas de mesures.

1.1.2.6 La même moyenne et la même dispersion ne donnent pas le même risque

Pour isoler l'effet de la forme de la loi, considérons maintenant une grandeur X de moyenne 300 MPa et d'écart-type 60 MPa dans chacun des trois modèles ci-dessous. La loi uniforme a pour bornes $300 \pm 60\sqrt{3}$, soit environ $[196{,}1, 403{,}9]$ MPa ; les paramètres lognormaux sont calculés avec la proposition 1.7. Ce paramétrage diffère de l'illustration précédente, dont la médiane était fixée à 300 MPa : ici, ce sont la moyenne et l'écart-type qui sont communs.

Loi de X	$\mathbb{P}(X \leq 200\ \text{MPa})$	$\mathbb{P}(X \geq 400\ \text{MPa})$
Uniforme	$1{,}89\,\%$	$1{,}89\,\%$
Normale	$4{,}78\,\%$	$4{,}78\,\%$
Lognormale	$2{,}57\,\%$	$6{,}04\,\%$

La première colonne de probabilités représente une rupture lorsque X est la résistance et que la sollicitation est fixée à 200 MPa. La seconde décrit un autre cas : X est la sollicitation et la résistance est fixée à 400 MPa. Le classement entre normale et lognormale s'inverse : une loi n'est donc pas systématiquement plus prudente que l'autre. L'exponentielle ne figure pas dans cette comparaison car elle impose $s_X = \mathbb{E}[X]$ et ne peut reproduire simultanément les deux moments choisis.

À retenir

Pour choisir une loi, préciser la grandeur et l'expérience, les valeurs physiquement possibles, le mécanisme additif, multiplicatif ou temporel envisagé, puis la zone qui gouverne la décision. Confronter ces choix aux données et examiner la dépendance entre variables. Un bon ajustement global ne suffit pas à valider une probabilité de rupture rare.

Proposition 1.7 (Paramétrer une loi lognormale).
Fixons une unité de référence et notons X la valeur numérique positive de la grandeur dans cette unité. Si $X = \exp(Z)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, s_Z^2)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu_Z + s_Z^2/2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = (e^{s_Z^2} - 1)e^{2\mu_Z + s_Z^2}.$$

Une moyenne physique $m_X > 0$ et un coefficient de variation c_X donnent donc

$$s_Z^2 = \log(1 + c_X^2), \qquad \mu_Z = \log(m_X) - \frac{1}{2}\log(1 + c_X^2). \tag{1.5}$$

Démonstration. Si $s_Z^2 = 0$, $Z = \mu_Z$ presque sûrement et les identités sont immédiates. Sinon, en complétant le carré dans la densité normale, on obtient $\mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{t\mu_Z + t^2 s_Z^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les cas $t = 1$ et $t = 2$ donnent la moyenne et le second moment de X. La relation $c_X^2 = \mathrm{Var}(X)/\mathbb{E}[X]^2 = e^{s_Z^2} - 1$ permet ensuite d'identifier s_Z^2, puis μ_Z. □

Les logarithmes portent ici sur les valeurs numériques dans une unité de référence fixée ; une écriture strictement dimensionnelle utilise $\log(X/X_{\mathrm{ref}})$. Ne pas confondre la moyenne de X avec celle de son logarithme.

1.1.3 Moments et modèle gaussien

La description par une loi complète permet de calculer des probabilités. Il est toutefois utile de commencer par sa moyenne et sa variance : elles permettent de contrôler les unités et d'identifier les effets des dispersions. Le modèle gaussien possède ensuite une propriété particulière : pour une réponse linéaire, ces deux moments déterminent toute la loi.

Définition 1.8 (Covariance et corrélation).
Pour deux variables R, S de moments d'ordre deux finis, on définit

$$\mathrm{Cov}(R, S) = \mathbb{E}[(R - m_R)(S - m_S)].$$

Si $s_R s_S > 0$, leur coefficient de corrélation est $\rho = \mathrm{Cov}(R, S)/(s_R s_S) \in [-1, 1]$. La covariance s'exprime dans le produit des unités ; la corrélation est sans dimension et mesure une liaison linéaire.

Proposition 1.9 (Moments d'une marge).
Si $\mathbb{E}[R^2] + \mathbb{E}[S^2] < \infty$, alors, sans hypothèse de loi ni d'indépendance,

$$\mathbb{E}[R - S] = m_R - m_S, \quad \mathrm{Var}(R - S) = s_R^2 + s_S^2 - 2\,\mathrm{Cov}(R, S). \tag{1.6}$$

Démonstration. La première identité résulte de la linéarité de l'espérance. Pour la seconde, on développe le carré de $(R - m_R) - (S - m_S)$, puis on prend l'espérance. □

Théorème 1.10 (Fiabilité d'une marge gaussienne).
Supposons (R, S) conjointement gaussien, avec $s_R, s_S > 0$, et posons $s_g^2 = s_R^2 + s_S^2 - 2\rho s_R s_S > 0$. La marge $g = R - S$ suit la loi $\mathcal{N}(m_R - m_S, s_g^2)$. Si Φ désigne la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, l'indice de fiabilité signé et la probabilité de défaillance sont

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{s_R^2 + s_S^2 - 2\rho s_R s_S}}, \qquad P_f = \Phi(-\beta). \tag{1.7}$$

La formule vaut aussi lorsque $m_R < m_S$: l'indice β est alors négatif.

1.1.3.1 Démonstration du calcul gaussien

Démonstration du théorème 1.10. Toute combinaison linéaire d'un vecteur conjointement gaussien est gaussienne. Les moments sont ceux de la proposition 1.9. La variable $(g - m_R + m_S)/s_g$ est donc normale centrée réduite et

$$\mathbb{P}(g \le 0) = \mathbb{P}\left(\frac{g - (m_R - m_S)}{s_g} \le -\frac{m_R - m_S}{s_g}\right) = \Phi(-\beta).$$

□

Remarque 1.11 (Portée de la formule gaussienne).
La connaissance des deux premiers moments ne suffit pas à établir $P_f = \Phi(-\beta)$; le calcul précédent utilise la normalité de la marge. Deux marginales normales ne garantissent pas, à elles seules, une loi jointe gaussienne. Si $s_g = 0$, la marge est déterministe presque sûrement : $P_f = \mathbf{1}_{m_R - m_S \le 0}$, sans division par un écart-type nul.

Pour des gaussiennes indépendantes, le changement $R = m_R + s_R U_R$, $S = m_S + s_S U_S$ donne la frontière

$$s_R U_R - s_S U_S + (m_R - m_S) = 0. \tag{1.8}$$

Dans ce cas linéaire, la distance de l'origine à cette droite vaut $|\beta|$. Une distance, toujours positive, ne distingue pas le côté sûr du côté défaillant. Pour des variables corrélées, une transformation vers des variables normales indépendantes est nécessaire à cette interprétation.

Exemple 1.12 (Marge gaussienne en contrainte).
Pour $m_R = 300$, $s_R = 30$, $m_S = 200$, $s_S = 20$, en MPa, et $\rho = 0$, $\beta = 100/\sqrt{1300} \simeq 2{,}77$ et $P_f \simeq 0{,}002773$. Les lois normales peuvent prendre des valeurs négatives ; leur pertinence est une hypothèse physique à discuter. Une loi lognormale est une possibilité lorsque la positivité est essentielle.

Corollaire 1.13 (Fiabilité de deux grandeurs lognormales).
Soient $R, S > 0$, exprimées dans une même unité de référence, avec $\log R \sim \mathcal{N}(\mu_R, v_R)$ et

$\log S \sim \mathcal{N}(\mu_S, v_S)$ indépendantes, et $v_R + v_S > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(R \leq S) = \Phi\left(-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{v_R + v_S}}\right).$$

Démonstration. Le logarithme est strictement croissant. L'événement $R \leq S$ équivaut à $\log R - \log S \leq 0$, et la différence suit $\mathcal{N}(\mu_R - \mu_S, v_R + v_S)$. On la centre et on la réduit comme ci-dessus. □

1.1.3.2 Exemple résolu : résistance et charge lognormales

Considérons deux grandeurs indépendantes, positives, exprimées dans la même unité, de moyennes $m_R = 120$, $m_S = 80$ et de coefficients de variation $c_R = 0{,}10$, $c_S = 0{,}20$. La différence $R - S$ n'est pas lognormale. En revanche, l'événement $R \leq S$ équivaut à $\log R - \log S \leq 0$. Avec les paramètres logarithmiques de (1.5),

$$\log R - \log S \sim \mathcal{N}(\mu_R - \mu_S, s^2_{\log R} + s^2_{\log S}).$$

Numériquement, $\mu_R - \mu_S \simeq 0{,}42010$ et la variance vaut $0{,}0491710$, d'où

$$P_f = \Phi\left(-\frac{0{,}42010}{\sqrt{0{,}0491710}}\right) \simeq 0{,}02908.$$

Cet exemple montre l'intérêt de transformer l'événement avant de simuler. Il ne faut pas appliquer automatiquement une formule normale à $R - S$.

1.1.3.3 Comment passer du calcul à une décision de dimensionnement ?

Avec une résistance en contrainte et une force positive, augmenter A_s réduit F/A_s à force fixée. On peut donc comparer plusieurs sections en recalculant la probabilité de $R_y \leq F/A_s$, tout en conservant le même modèle de charges. Une amélioration obtenue en changeant aussi arbitrairement la loi des charges ne serait pas imputable au seul dimensionnement.

Il faut ensuite examiner la sensibilité aux hypothèses : la dispersion de R_y est-elle mesurée dans les mêmes conditions de température et de fabrication ? Une charge exceptionnelle appartient-elle à la population retenue ? Le modèle calcule une probabilité conditionnelle à ces choix ; le seuil d'acceptation dépend du cahier des charges du problème étudié.

1.1.3.4 Exemple guidé : dimensionner la barre avec une référence exacte

Considérons une résistance $R_y \sim \mathcal{N}(300, 30^2)$ MPa et une force $F \sim \mathcal{N}(20000, 2000^2)$ N, indépendantes. Cet exemple reprend la marge gaussienne précédente en faisant varier la section $A_s > 0$, exprimée en mm^2. Puisque 1 MPa $= 1$ N/mm^2, la sollicitation F/A_s a pour moyenne $20000/A_s$ et pour écart-type $2000/A_s$, en MPa. Ainsi

$$\beta(A_s) = \frac{300 - 20000/A_s}{\sqrt{30^2 + (2000/A_s)^2}} = \frac{300A_s - 20000}{\sqrt{900A_s^2 + 4 \times 10^6}}, \quad P_f(A_s) = \Phi\big(-\beta(A_s)\big). \tag{1.9}$$

Dans la seconde écriture, numérateur et dénominateur sont des forces. Multiplier la marge par la section positive ne change donc ni son signe ni sa probabilité de défaillance. Les résultats sont

A_s (mm^2)	$\mathbb{E}[F/A_s]$ (MPa)	β	P_f
80	250	1,280	$1{,}0021 \times 10^{-1}$
100	200	2,774	$2{,}7728 \times 10^{-3}$
120	166,67	3,885	$5{,}1135 \times 10^{-5}$

L'augmentation de section réduit à la fois la moyenne et l'écart-type de la sollicitation. La résistance du matériau, exprimée en contrainte, conserve ici sa loi : elle ne devient pas moins dispersée parce que la barre est plus épaisse.

Pour un objectif *illustratif* $P_f \leq 10^{-3}$, sans prescription normative, il faut $\beta \geq b$ avec $b = \Phi^{-1}(0{,}999) \simeq 3{,}0902$. À la limite du dimensionnement,

$$(300A_s - 20000)^2 = b^2(900A_s^2 + 4 \times 10^6), \qquad 300A_s - 20000 > 0.$$

La condition de signe est nécessaire : élever au carré ne doit pas transformer une marge moyenne négative en une solution acceptable. Dans ce modèle, $\beta(A_s)$ est croissante et le seuil est $A_s \simeq 105{,}138$ mm^2. Une section de 105 mm^2 donne encore $P_f \simeq 1{,}028 \times 10^{-3}$. Il faut donc choisir la section réalisable du côté sûr, puis vérifier aussi les autres critères mécaniques. L'approximation normale autorise des valeurs négatives extrêmement peu probables ici ; sa pertinence dans les queues reste une hypothèse du calcul.

1.1.4 Monte-Carlo et précision

Pourquoi introduire Monte-Carlo après ce calcul ? La solution exacte fournit un point de comparaison. Lorsque la réponse devient un maximum sur plusieurs sections, un quotient de variables ou le résultat d'un calcul numérique, l'intégrale peut être moins accessible. Nous conservons alors la même définition de la défaillance et remplaçons son calcul analytique par une fréquence sur des épreuves simulées.

1.1.4.1 Construire l'estimateur de probabilité

Théorème 1.14 (Estimation Monte-Carlo d'une probabilité).
Soient $(R_j, S_j)_{j\geq 1}$ des couples indépendants et de même loi que (R, S), et $p = P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$. Les deux composantes d'un même couple peuvent être dépendantes. Pour $N \geq 1$, l'estimateur

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{R_j \leq S_j}, \quad \mathbb{E}[\widehat{P}_f] = P_f, \quad \mathrm{Var}(\widehat{P}_f) = \frac{P_f(1-P_f)}{N} \tag{1.10}$$

est sans biais et converge presque sûrement vers P_f lorsque $N \to \infty$. Si $0 < P_f < 1$, il vérifie en outre

$$\frac{\widehat{P}_f - P_f}{\sqrt{P_f(1-P_f)/N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

1.1.4.2 D'où viennent la variance et le taux de convergence ?

Démonstration à partir de la loi des grands nombres et du TCL. Chaque indicatrice $I_j = \mathbf{1}_{R_j \leq S_j}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre P_f. Elle vérifie $I_j^2 = I_j$, donc $\mathbb{E}[I_j] = P_f$ et $\mathrm{Var}(I_j) = P_f - P_f^2$. La linéarité de l'espérance donne l'absence de biais, et l'indépendance des essais annule les covariances croisées :

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_j I_j\right) = \frac{1}{N^2}\sum_j \mathrm{Var}(I_j) = \frac{P_f(1-P_f)}{N}.$$

La loi forte des grands nombres et le théorème central limite pour des variables indépendantes de même loi sont admis ici. Les indicatrices, bornées, satisfont leurs hypothèses ; leur variance est strictement positive si $0 < P_f < 1$. Leur application donne les deux convergences annoncées. □

La fluctuation typique est d'ordre $N^{-1/2}$. Diviser l'écart-type par deux demande quatre fois plus de simulations. Pour un événement rare, l'écart-type relatif vaut $\sqrt{(1-P_f)/(NP_f)} \simeq 1/\sqrt{NP_f}$: le nombre de défaillances observées est déterminant. Le TCL décrit la loi de l'estimateur sur des répétitions de l'expérience numérique, et non la loi physique de $R - S$.

Remarque 1.15 (Un intervalle normal est une approximation).
L'intervalle $\widehat{P}_f \pm 1{,}96\sqrt{\widehat{P}_f(1-\widehat{P}_f)/N}$ est un intervalle de confiance asymptotique à 95 %. Il n'est pas adapté à un nombre faible ou nul de défaillances. On peut alors employer un intervalle binomial exact ou de Wilson ; ce dernier reste une approximation.

1.1.4.3 Préparer un budget de simulation

Pour une demi-largeur relative visée ε d'un intervalle normal approché à 95 %, on impose $1{,}96\sqrt{P_f(1-P_f)/N} \leq \varepsilon P_f$. Cela conduit à

$$N \gtrsim \frac{1{,}96^2(1-P_f)}{\varepsilon^2 P_f}. \tag{1.11}$$

Pour $P_f \simeq 0{,}002773$ et $\varepsilon = 10\,\%$, il faut environ $138\,200$ essais. Comme P_f est généralement inconnu, ce calcul utilise un ordre de grandeur préalable ou une expérience pilote. Il ne faut pas interpréter cette approximation comme une garantie de précision exacte.

Pour approfondir
Un intervalle de Wilson reste exploitable près de zéro. Avec $z = 1{,}96$ et $\widehat{p} = K/N$, son centre et sa demi-largeur sont

$$c = \frac{\widehat{p} + z^2/(2N)}{1 + z^2/N}, \qquad d = \frac{z}{1+z^2/N}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{N} + \frac{z^2}{4N^2}}.$$

L'intervalle est $[c-d, c+d]$. Il provient de l'inversion d'un test où la variance est évaluée sous la valeur hypothétique du paramètre. Un intervalle binomial exact repose directement sur les queues de la loi binomiale.

1.1.4.4 Ce que signifie une expérience sans aucune rupture

Proposition 1.16 (Borne binomiale après zéro défaillance).
Fixons à l'avance $N \geq 1$ essais indépendants de même probabilité de défaillance p, et $\alpha \in (0,1)$. Si aucune défaillance n'est observée, la borne supérieure de la procédure binomiale exacte unilatérale de confiance $1-\alpha$ est

$$p_{\sup} = 1 - \alpha^{1/N}.$$

Démonstration. Le nombre de défaillances K suit $\mathrm{Bin}(N,p)$. La probabilité d'observer $K = 0$ est $(1-p)^N$, décroissante en p. L'inversion du test binomial à la frontière $(1-p_{\sup})^N = \alpha$ donne la borne annoncée. Le niveau de confiance qualifie la procédure sur des répétitions des essais, et non une loi du paramètre p. □

Supposons $N = 1000$ épreuves indépendantes sans dépassement. Le résultat observé est $\widehat{P}_f = 0$, mais si le vrai paramètre était $p > 0$, cet événement aurait encore pour probabilité $(1-p)^{1000}$. La borne supérieure unilatérale à 95 % se déduit de

$$(1 - p_{\text{sup}})^{1000} = 0{,}05, \qquad p_{\text{sup}} = 1 - 0{,}05^{1/1000} \simeq 0{,}002991.$$

On ne peut donc pas conclure, avec ces seules simulations, que le risque est inférieur à 10^{-4}. Cette borne est issue d'une procédure de confiance fréquentiste ; ce n'est pas une probabilité de 95 % attribuée au paramètre inconnu. L'approximation $p_{\text{sup}} \simeq 3/N$ vient de $-\log(0{,}05) \simeq 3$ et de $e^{-a/N} \simeq 1 - a/N$.

Remarque 1.17 (Sources d'erreur distinctes).
La *variabilité physique* est celle des contraintes entre épreuves. L'*erreur d'échantillonnage* est celle de la fréquence calculée sur un nombre fini d'épreuves ; elle diminue lorsque N augmente. Enfin, une *erreur de modèle* apparaît si la loi des charges ou le critère de ruine représente mal la situation réelle. Augmenter N ne corrige pas cette dernière. Quand la réponse mécanique est approchée par un maillage ou un schéma temporel, une erreur de discrétisation s'ajoute encore : elle doit être étudiée séparément de la taille de l'échantillon. Cette distinction sera réutilisée pour le substitut du chapitre 2 et les trajectoires du chapitre 4.

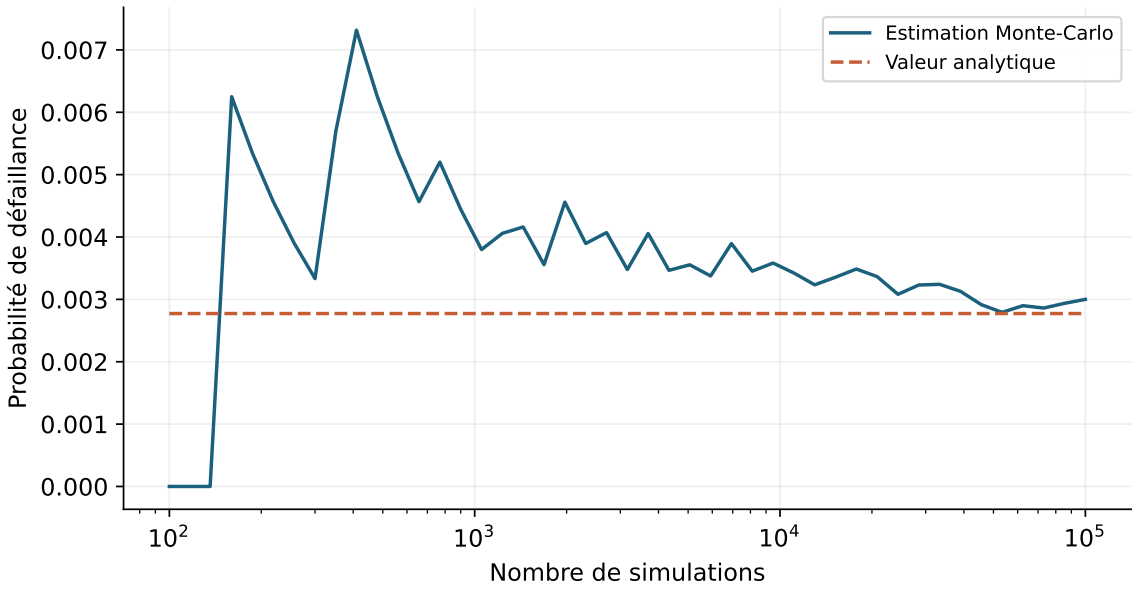


Figure 1.3 **Convergence d'une estimation de fiabilité.** L'estimateur est la fraction d'épreuves où $R \leq S$, dans le cas gaussien du chapitre. La ligne horizontale donne la référence analytique. Chaque point réutilise les premières observations d'un même échantillon ; les points ne sont donc pas indépendants. Les oscillations diminuent globalement avec le nombre de simulations, sans convergence nécessairement monotone. Elles traduisent l'erreur Monte-Carlo, pas une évolution de la résistance de la pièce.

Lire une décision de dimensionnement. La figure 1.4 passe de la distribution d'une marge à l'effet d'une modification de section. La précision relative devient plus exigeante quand les défaillances simulées se raréfient.

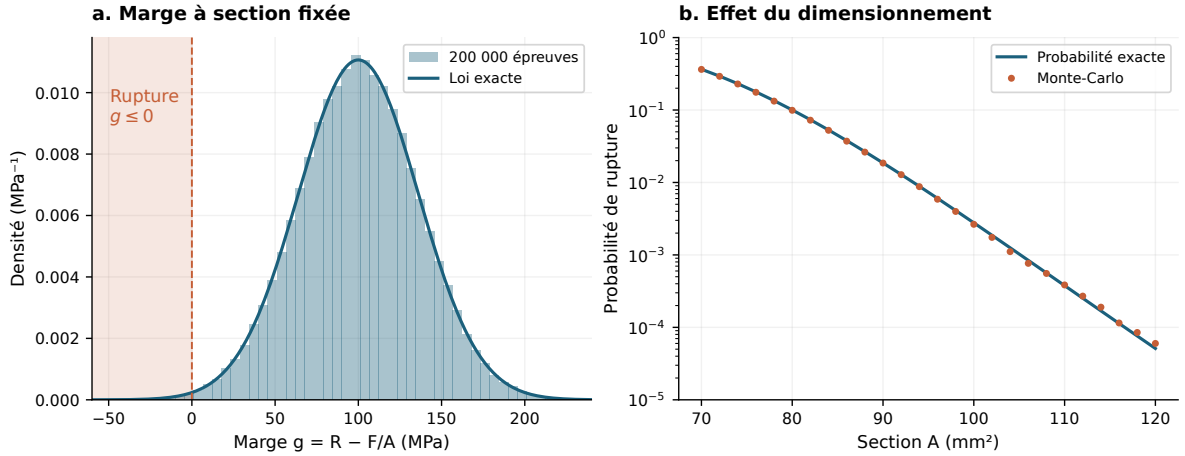


Figure 1.4 **La moyenne ne suffit pas pour dimensionner.** Les 200000 épreuves synthétiques utilisent $R \sim \mathcal{N}(300, 30^2)$ MPa et $F \sim \mathcal{N}(20000, 2000^2)$ N indépendants. **(a)** Pour $A_s = 100$ mm^2, la marge a une moyenne de 100 MPa mais sa queue $g \leq 0$ demeure non nulle : la probabilité exacte est $2{,}773 \times 10^{-3}$, contre $2{,}645 \times 10^{-3}$ dans cet échantillon. **(b)** Augmenter la section réduit la contrainte et la probabilité de dépassement, représentée en échelle logarithmique. Les mêmes couples (R, F) sont réutilisés pour comparer les sections : les points Monte-Carlo sont corrélés entre eux. Leur écart à la courbe provient de l'échantillonnage ; il ne constitue pas une modification de la loi mécanique.

> **À retenir**
> Zéro rupture simulée ne signifie pas une probabilité de rupture nulle. Un coefficient de sécurité moyen supérieur à un n'est pas une garantie probabiliste.

Pour approfondir : Fiabilité structurale : Madsen et al. [1].

1.2 Partie B — Poutre sous charges aléatoires corrélées

La barre nous a appris à transformer une marge en probabilité. La poutre ajoute deux difficultés : les charges sont liées et le lieu le plus sollicité peut changer. Nous commencerons donc par un chargement fixé, puis par les statistiques des moments, avant de revenir à l'événement de dépassement.

> **Situation mécanique**
> Une traverse supporte deux équipements dont les masses et les efforts transmis varient. Si les deux équipements subissent la même accélération, leurs charges peuvent augmenter ensemble. À l'inverse, une charge totale répartie entre deux points peut produire une dépendance négative. La section la plus sollicitée dépend de la combinaison des efforts. Comment passer de la variabilité des deux charges à celle des moments, puis à une probabilité de dépassement de la contrainte admissible ?

> **Objectif de cette partie**
> Transformer un vecteur gaussien en sollicitations mécaniques, simuler sa corrélation et identifier les limites de Monte-Carlo direct.

Quand utiliser cette partie ? Pour une structure dont la réponse est approximativement linéaire et les chargements quasi statiques. L'équilibre mécanique détermine les coefficients de transmission des efforts ; la loi jointe des charges détermine leur variabilité. Une réponse dynamique près d'une résonance ou une plastification demanderait un modèle plus riche.

La figure 1.5 relie les conditions d'appui au calcul des réactions, puis les caractéristiques de section à la flèche et à la contrainte. Ces deux critères répondent à des exigences mécaniques différentes.

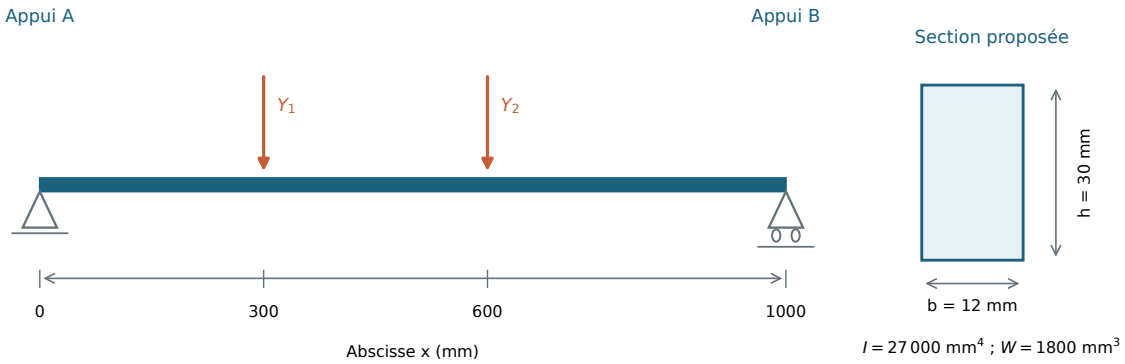


Figure 1.5 **Géométrie, liaisons et grandeur à vérifier.** La poutre de portée $L = 1000$ mm porte deux forces verticales Y_1, Y_2, appliquées à 300 et 600 mm. Un appui articulé et un appui mobile autorisent la rotation aux extrémités ; le déplacement vertical y est nul. La section rectangulaire illustrée, $b = 12$ mm et $h = 30$ mm, donne $I = bh^3/12 = 27000$ mm^4 et $W = I/(h/2) = 1800$ mm^3. I gouverne la rigidité de flexion EI ; W convertit le moment en contrainte maximale $|M|/W$. Cette géométrie est un choix pédagogique pour les simulations, distinct d'une donnée imposée par le TD.

1.2.1 Équilibre et réponse mécanique

Avant de propager une incertitude, il faut disposer d'un modèle mécanique déterministe cohérent. Ici on suppose une poutre droite, des appuis idéalisés, un comportement statique et une flexion pour laquelle les contraintes sont déduites du moment par $\sigma = M/W$. Les incertitudes portent d'abord sur les charges, tandis que la géométrie et W sont fixés. Ajouter une incertitude sur W changerait la nature de la transformation, qui ne serait plus linéaire.

Lemme 1.18 (Maximum d'un profil affine par morceaux).
Si m est continue sur $[a, b]$ et affine sur chaque intervalle d'une subdivision finie $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, alors

$$\max_{x\in[a,b]} |m(x)| = \max_{0\le i\le n} |m(x_i)|.$$

Démonstration. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on écrit $m(x) = (1-t)m(x_i) + tm(x_{i+1})$, $0 \le t \le 1$. L'inégalité triangulaire donne $|m(x)| \le (1-t)|m(x_i)| + t|m(x_{i+1})| \le \max(|m(x_i)|, |m(x_{i+1})|)$. □

Proposition 1.19 (Réponse de la poutre sous deux forces).
Une poutre simplement appuyée de longueur $L = 1000$ mm porte Y_1 à $0{,}3L$ et Y_2 à $0{,}6L$. Son module de résistance est $W = 1800$ mm^3. Dans le modèle statique de flexion adopté, avec géométrie fixée et sans autre chargement, les réactions sont

$$R_A = 0{,}7Y_1 + 0{,}4Y_2, \qquad R_B = 0{,}3Y_1 + 0{,}6Y_2. \tag{1.12}$$

Avec $a_+ = \max(a, 0)$ et une convention de moment positif en flexion sagissante,

$$M(x) = R_A x - Y_1(x - 0{,}3L)_+ - Y_2(x - 0{,}6L)_+. \tag{1.13}$$

Ainsi les deux moments aux charges vérifient

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = A\boldsymbol{Y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{pmatrix} \text{ mm}. \tag{1.14}$$

Le moment est affine entre deux points de charge. Le maximum de sa valeur absolue est donc atteint à une extrémité de ces intervalles. Comme les moments aux appuis sont nuls, la contrainte maximale en valeur absolue est

$$\sigma_{\max} = \frac{\max(|M_1|, |M_2|)}{W}. \tag{1.15}$$

La valeur absolue permet de traiter correctement les faibles probabilités de charges négatives induites par l'approximation gaussienne.

Démonstration. L'équilibre impose $R_A + R_B = Y_1 + Y_2$ et $LR_B = 0{,}3LY_1 + 0{,}6LY_2$. En coupant la poutre à l'abscisse x, le moment des efforts à gauche donne $M(x)$. Son évaluation aux deux points de charge fournit la matrice A. Le lemme 1.18, avec $M(0) = M(L) = 0$, permet enfin de calculer le maximum de contrainte à partir de ces deux sections. □

1.2.1.1 Lecture du diagramme de moment

Sur le premier intervalle, $0 \le x \le 0{,}3L$, aucune charge ponctuelle ne se trouve entre l'appui A et la section : $M(x) = R_A x$. Entre les deux charges, $M(x) = R_A x - Y_1(x - 0{,}3L)$. Au-delà de la seconde charge, les deux contributions doivent être soustraites. Le moment est continu, mais sa dérivée, liée à l'effort tranchant, présente un saut à chaque charge.

Le lemme 1.18 explique pourquoi deux sections suffisent ici : ce calcul n'est pas une approximation par un maillage grossier. Avec une charge répartie, le diagramme n'est plus affine et il faudrait rechercher aussi ses extrema intérieurs.

1.2.1.2 Fixer les idées sur une réalisation de référence

Pour $Y_1 = 800$ N et $Y_2 = 400$ N, les réactions valent $R_A = 720$ N et $R_B = 480$ N. Leur somme est bien la charge totale de 1200 N. Aux deux sections de charge,

$$M_1 = 720 \times 300 = 216000 \text{ N mm}, \qquad M_2 = 720 \times 600 - 800 \times 300 = 192000 \text{ N mm}.$$

Avec $W = 1800$ mm^3, les contraintes extrêmes en module sont 120 MPa et environ 106,67 MPa. Le premier point de charge est donc critique pour *cette réalisation*. Ce calcul est déterministe ; les nombres 800 et 400 peuvent ensuite être interprétés comme les moyennes d'une population de chargements, mais ils ne représentent pas tous ses cas défavorables.

Pourquoi distinguer moment, contrainte et déformation ? Pour cette structure isostatique, les réactions et les moments découlent de l'équilibre sans connaître le module d'Young E_Y. La contrainte dépend en plus de W, tandis que la flèche dépend de la rigidité $E_Y I$. Pour une section rectangulaire, $I = bh^3/12$ et $W = bh^2/6$: doubler la hauteur multiplie I par huit et W par quatre. À chargement

et matériau inchangés, les contraintes sont donc divisées par quatre et les flèches par huit dans le modèle linéaire. Le poids propre devrait être recalculé s'il fait partie du chargement. Cette distinction explique pourquoi une bonne résistance et une bonne rigidité sont deux vérifications différentes.

1.2.2 Vecteurs gaussiens et Cholesky

Passer de cette réalisation à une population. La matrice A est maintenant fixée par l'équilibre. Il reste à construire des couples de charges dont la dispersion et la dépendance reproduisent le modèle choisi ; c'est le rôle du vecteur gaussien et de sa factorisation.

1.2.2.1 Spécifier et simuler le vecteur des charges

Définition 1.20 (Vecteur gaussien).
Un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$ est gaussien si toute combinaison linéaire $\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, suit une loi normale, éventuellement de variance nulle. On note $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$, où

$$\boldsymbol{m} = \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}], \qquad V = \mathbb{E}[(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})^{\mathsf{T}}].$$

La matrice V est symétrique positive au sens large. La normalité de chaque composante séparément ne suffit pas à définir un vecteur gaussien.

Proposition 1.21 (Simulation gaussienne par Cholesky).
Soit $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symétrique définie positive. Elle admet une unique factorisation $V = CC^{\mathsf{T}}$ avec C triangulaire inférieure à diagonale strictement positive. Si $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$, alors $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}$ suit la loi $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$.

Démonstration. L'existence et l'unicité de Cholesky sont un résultat d'algèbre linéaire admis ici. Toute combinaison linéaire de $\boldsymbol{m}+C\boldsymbol{Z}$ est gaussienne. De plus, $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] = 0$ et $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}] = I_d$, donc $\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{m}$ et $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}) = CI_dC^{\mathsf{T}} = V$. □

On adopte les données du TD initial :

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{m}, V), \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix} \ \mathsf{N}, \quad V = 10^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \ \mathsf{N}^2. \tag{1.16}$$

Une covariance n'est pas une corrélation : ici $\rho = V_{12}/\sqrt{V_{11}V_{22}} = \sqrt{3}/2$. La factorisation $V = CC^{\mathsf{T}}$ fournit

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(0, I). \tag{1.17}$$

En Python, lorsque chaque observation est une ligne, on utilise `Y = m + Z @ C.T`.

Proposition 1.22 (Propagation linéaire des moments).
Soit $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$ de moments d'ordre deux finis, de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de covariance V. Pour une matrice déterministe A et $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{M}] = A\boldsymbol{m}, \qquad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{M}) = AVA^{\mathsf{T}}. \tag{1.18}$$

Ces identités ne demandent pas de loi gaussienne. Si, en outre, $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$, alors $\boldsymbol{M} \sim \mathcal{N}(A\boldsymbol{m}, AVA^{\mathsf{T}})$, avec une covariance éventuellement singulière.

Remarque 1.23 (Une linéarisation est une approximation).
Pour une fonction non linéaire f différentiable en $\boldsymbol{m}$, la variable linéarisée $f(\boldsymbol{m}) + \nabla f(\boldsymbol{m})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})$ a exactement pour variance $\nabla f(\boldsymbol{m})^{\mathsf{T}} V \nabla f(\boldsymbol{m})$. L'identifier à $\mathrm{Var}(f(\boldsymbol{Y}))$ est une approximation, adaptée à de faibles fluctuations et à un reste de linéarisation négligeable en moyenne quadratique.

1.2.2.2 Construire la corrélation à partir de normales indépendantes

Une autre écriture de Cholesky, utile pour comprendre les rôles des paramètres, est

$$Y_1 = m_1 + s_1 Z_1, \qquad Y_2 = m_2 + s_2 \left(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \right),$$

où Z_1, Z_2 sont indépendantes et standard. Le partage de Z_1 produit la covariance $\rho s_1 s_2$; le terme en Z_2 complète la variance de Y_2 pour qu'elle reste s_2^2. Cette construction exige $|\rho| \leq 1$. Pour $|\rho| = 1$, la covariance est singulière et une factorisation de Cholesky strictement définie positive doit être remplacée par une représentation de rang réduit.

Le changement inverse $\boldsymbol{Z} = C^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})$, réalisé par une résolution triangulaire, rend les composantes indépendantes dans le modèle gaussien. Il est appelé blanchiment. Centrer et réduire chaque composante séparément donne seulement des variances égales à un ; cela n'annule pas les corrélations.

1.2.2.3 Propager la moyenne et la covariance : démonstration

Démonstration de la proposition 1.22. Écrivons $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\eta}$, avec $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}] = 0$ et $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}] = V$. Pour $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$,

$$\boldsymbol{M} - A\boldsymbol{m} = A\boldsymbol{\eta}, \qquad \mathbb{E}[(\boldsymbol{M} - A\boldsymbol{m})(\boldsymbol{M} - A\boldsymbol{m})^{\mathsf{T}}] = A\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}]A^{\mathsf{T}}.$$

Ces formules de moments n'exigent pas une loi gaussienne. L'hypothèse gaussienne permet en plus d'identifier la loi complète de $\boldsymbol{M}$, car toute combinaison linéaire de ses composantes est une combinaison linéaire de celles de $\boldsymbol{Y}$. □

On peut alors calculer les probabilités de dépassement à partir de ces moments.

1.2.2.4 Lire toute la matrice de covariance des moments

Avec les données du cours, le produit matriciel donne

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{M}] = \begin{pmatrix} 216000 \\ 192000 \end{pmatrix} \mathrm{N\,mm}, \qquad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{M}) = 10^6 \begin{pmatrix} 741 & 672 \\ 672 & 624 \end{pmatrix} (\mathrm{N\,mm})^2.$$

Pour voir l'origine du terme hors diagonale, développons un calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(M_1, M_2) &= (210)(120)V_{11} + \big[(210)(240) + (120)(120)\big]V_{12} \\ &\quad + (120)(240)V_{22} \\ &= (252 + 324 + 96) \times 10^6 = 672 \times 10^6 \ (\mathrm{N\,mm})^2. \end{aligned}$$

Les écarts-types des moments sont donc environ 27221 et 24980 N mm. Après division par W, ceux des contraintes *signées* aux deux sections sont 15,12 et 13,88 MPa. Leur coefficient de corrélation vaut $672/\sqrt{741 \times 624} \simeq 0{,}9883$: les deux sections répondent presque ensemble, puisqu'elles reçoivent les effets des mêmes charges. Il serait incohérent de tirer leurs contraintes indépendamment.

Pour une différence $M_2 - M_1$, le terme de covariance est soustrait :

$$\mathrm{Var}(M_2 - M_1) = (624 + 741 - 2 \times 672) \times 10^6 = 21 \times 10^6 \ (\mathrm{N\,mm})^2.$$

Une forte corrélation peut ainsi augmenter la dispersion de chaque moment tout en limitant celle de leur différence. L'effet mécanique d'une dépendance s'apprécie toujours par rapport à la grandeur étudiée.

1.2.2.5 Pourquoi la corrélation des charges change-t-elle la flexion ?

Pour $M_1 = 210Y_1 + 120Y_2$, les deux coefficients sont positifs : deux charges élevées au même instant renforcent le moment dans la section. Une corrélation positive ajoute donc un terme positif à sa variance. À l'inverse, si une charge totale fixée se partage entre deux points, l'augmentation de l'une peut accompagner la diminution de l'autre. Tirer deux charges indépendantes simulerait alors des configurations qui ne respectent pas ce mécanisme de partage.

La bonne méthode consiste à identifier l'origine physique commune des charges avant de choisir leur loi jointe. Le signe de l'effet dépend aussi de la réponse : pour une différence d'efforts ou un couple de torsion, certains coefficients peuvent être de signes opposés. « Plus corrélé » ne signifie donc pas toujours « plus dangereux » pour toute grandeur mécanique.

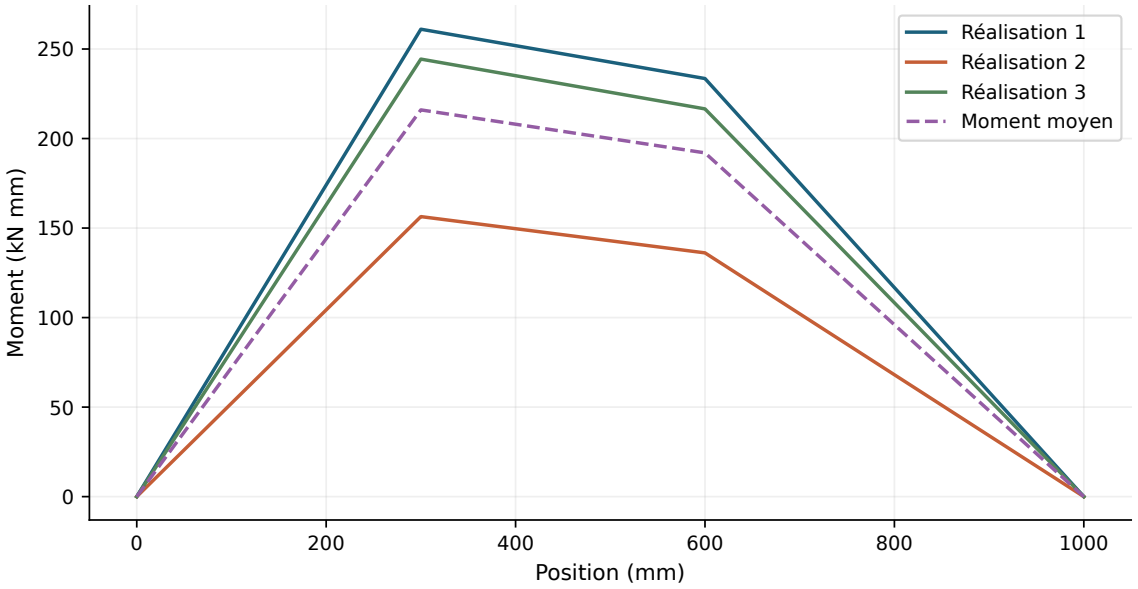


Figure 1.6 **Du chargement au diagramme de moment.** Trois couples (Y_1, Y_2) donnent trois profils affines par morceaux ; les changements de pente à 300 et 600 mm signalent les forces ponctuelles. Le moment est nul aux appuis. Le profil moyen est obtenu avec les charges moyennes parce que la réponse en moment est linéaire. Les profils ont la même géométrie, mais des amplitudes différentes : le dimensionnement doit considérer les dépassements, pas seulement ce profil moyen.

1.2.3 Événement de défaillance et choix du cas numérique

Nous connaissons maintenant la distribution jointe des deux moments. Le dimensionnement demande une information supplémentaire : *quel événement rend la poutre inacceptable ?* Le critère retenu exige que les deux sections restent sous le seuil. Il faut donc raisonner sur une union d'événements, en conservant leur dépendance. La poutre est sûre si $|M_1| < W\sigma_a$ et $|M_2| < W\sigma_a$.

Proposition 1.24 (Bornes pour une défaillance en plusieurs sections).
Soient $W > 0$ et $\sigma_a > 0$ déterministes et $F_i = \{|M_i| \geq W\sigma_a\}$, pour $i = 1, 2$. Sans hypothèse d'indépendance entre les moments,

$$\max_i \mathbb{P}(F_i) \leq P_f = \mathbb{P}(F_1 \cup F_2) \leq \min\{1, \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2)\}. \tag{1.19}$$

Démonstration. Chaque F_i est inclus dans $F_1 \cup F_2$, ce qui donne la borne inférieure. L'identité $\mathbb{P}(F_1 \cup F_2) = \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$ donne la borne supérieure, complétée par $P_f \leq 1$. □

Les événements sont dépendants : additionner leurs probabilités donne une borne, pas une identité. Pour $\sigma_a = 250$ MPa, les données conduisent à $P_f \simeq 4{,}12 \times 10^{-18}$; Monte-Carlo direct n'est pas un outil pratique d'estimation de cet événement dans une courte démonstration. On conserve ce cas pour discuter les événements rares et on introduit explicitement une **variante pédagogique à 140 MPa**. Sa probabilité de défaillance est comprise entre $0{,}0930$ et $0{,}1012$.

Retrouver ces bornes et leur sens mécanique. Au seuil illustratif de 140 MPa, le moment admissible est $c = W\sigma_a = 252000$ N mm. Pour $M_i \sim \mathcal{N}(m_i, s_i^2)$,

$$\mathbb{P}(F_i) = \Phi\left(\frac{-c - m_i}{s_i}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c - m_i}{s_i}\right).$$

La première probabilité traite le dépassement négatif ; la seconde le dépassement positif. Elles valent ensemble environ $0{,}093002$ pour la section 1 et $0{,}008155$ pour la section 2. La proposition 1.24 fournit donc les bornes annoncées. La somme des probabilités locales compte deux fois les réalisations qui dépassent les deux seuils. On ne remplace pas l'intersection par le produit des probabilités sans indépendance. Une seule épreuve Monte-Carlo doit donc tirer *un couple de charges*, calculer *les deux moments* et tester *une seule indicatrice de défaillance globale*.

1.2.3.1 Quand conserver la géométrie comme déterministe ?

Le calcul M/W suppose W connu. Une dispersion d'épaisseur, une perte de matière par corrosion ou une incertitude de fabrication peut rendre W aléatoire. Il faut alors propager un quotient, et éventuellement la dépendance entre géométrie et chargement. Le modèle linéaire en charges reste utile pour isoler un mécanisme, mais ne suffit plus à décrire toutes les incertitudes. En pratique pédagogique, on ajoute un aléa à la fois et on vérifie ce qu'il change dans la moyenne, la dispersion et l'événement de rupture.

1.2.3.2 Interpréter une influence paramétrique

La sensibilité locale de M_1 aux charges est donnée par $\partial M_1/\partial Y_1 = 210$ mm et $\partial M_1/\partial Y_2 = 120$ mm. Ces nombres décrivent l'effet d'une variation d'un newton ; ils ne mesurent pas seuls l'effet des incertitudes, car les deux charges n'ont pas le même écart-type. Dans la variance de M_1, les contributions sont

$$210^2 s_1^2 + 120^2 s_2^2 + 2(210)(120)\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Pour les données du cours, elles valent respectivement 441, 48 et 252, en millions de (N mm)^2. Le terme de dépendance représente une partie importante de la dispersion. Le partager arbitrairement entre les deux charges ne fournirait pas une attribution unique d'importance à chaque variable.

Observer la flexion, puis le risque. La figure 1.7 complète les diagrammes de moment par les déplacements et par une probabilité de dépassement. Modifier la corrélation conserve les lois marginales des charges, mais change leur action conjointe.

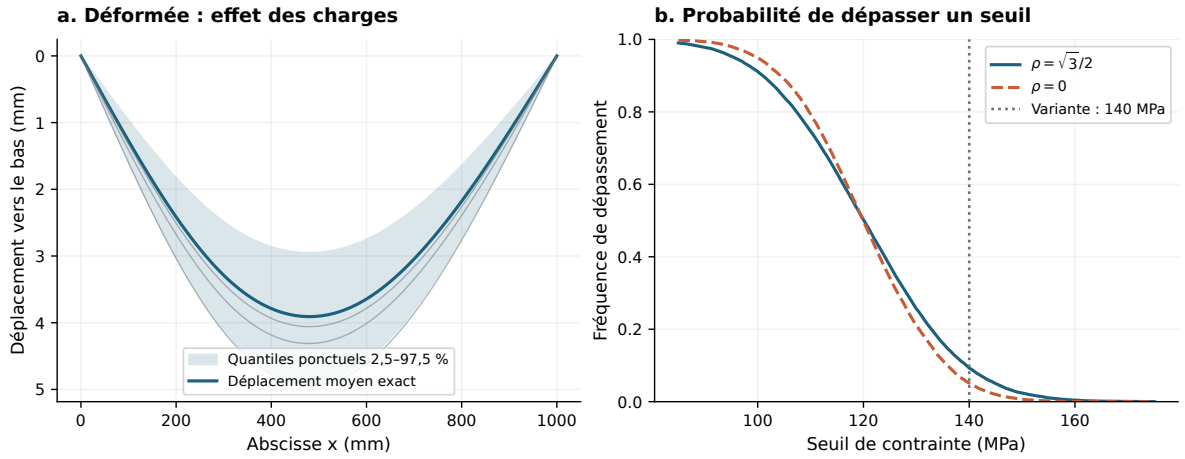


Figure 1.7 **Une même charge moyenne peut masquer des risques différents.** La poutre du schéma utilise $E = 200000$ MPa, $I = 27000$ mm^4 et $W = 1800$ mm^3, avec 20000 tirages par scénario. Les moyennes des charges sont $(800, 400)$ N et leurs écarts-types $(100, 100/\sqrt{3})$ N. **(a)** Pour $\rho = \sqrt{3}/2$, trois déformées Euler–Bernoulli entourent la moyenne exacte, dont la flèche maximale vaut environ $3{,}91$ mm. La bande 2,5–97,5 % décrit des quantiles *ponctuels* de déplacement ; ce n'est ni un intervalle sur la moyenne ni une enveloppe simultanée. Les échelles horizontale et verticale diffèrent. **(b)** Au seuil de 140 MPa, le dépassement vaut environ 9,30 % avec corrélation, contre 5,15 % sans corrélation : des charges élevées concomitantes renforcent ici la flexion. L'ordre des courbes n'est pas universel pour tous les seuils.

1.2.4 Approfondissement : une réponse mécanique non linéaire

La relation $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$ est linéaire, mais le maximum de contraintes utilisé pour la fiabilité ne l'est déjà plus. Lorsque la raideur ou la géométrie devient aléatoire, même une réponse locale peut devenir non linéaire. L'exemple suivant explique alors ce que l'on perd en remplaçant chaque entrée par sa moyenne.

> **Pour approfondir**
> Cette section prolonge les transformations linéaires. Elle peut être étudiée après le TD, sans être nécessaire à sa résolution.

Considérons une barre élastique de longueur L et de section A_s, soumise à une force F, de module d'Young E_Y. Son allongement vaut

$$U = \frac{FL}{A_s E_Y}.$$

Si F et E_Y varient, le calcul de la moyenne à partir des seules moyennes des entrées n'est plus exact. Posons $U_0 = m_F L/(A_s m_E)$ et linéarisons autour de (m_F, m_E) :

$$U \simeq U_0 + \frac{U_0}{m_F}(F - m_F) - \frac{U_0}{m_E}(E_Y - m_E).$$

Avec les coefficients de variation c_F, c_E et la corrélation ρ, on obtient

$$\frac{\mathrm{Var}(U)}{U_0^2} \simeq c_F^2 + c_E^2 - 2\rho c_F c_E. \tag{1.20}$$

Le signe négatif vient du fait qu'augmenter la force accroît l'allongement, tandis qu'augmenter le module le réduit. Cette formule est locale : une forte dispersion, des valeurs proches de zéro du module ou une non-linéarité marquée peuvent la rendre imprécise.

Exemple résolu. Prendre $L = 1000$ mm, $A_s = 100$ mm^2, $m_F = 1000$ N, $c_F = 0{,}10$, $m_E = 200000$ MPa, $c_E = 0{,}05$ et des entrées indépendantes. Alors $U_0 = 0{,}05$ mm et l'écart-type linéarisé est $0{,}05\sqrt{0{,}10^2 + 0{,}05^2} \simeq 0{,}00559$ mm. Si les deux entrées sont lognormales, le quotient l'est aussi et le calcul exact donne

$$\mathbb{E}[U] = U_0(1 + c_E^2) = 0{,}050125 \text{ mm}, \qquad \frac{\mathrm{Var}(U)}{\mathbb{E}[U]^2} = (1 + c_F^2)(1 + c_E^2) - 1.$$

L'écart entre $\mathbb{E}[U]$ et U_0 résulte de la non-linéarité en $1/E_Y$. Une simulation Monte-Carlo peut ici être vérifiée à la fois par une solution exacte et par une approximation au premier ordre.

Pour approfondir : Madsen et al. [1].

Du chapitre 1 au chapitre 2 : de la réponse calculée à la réponse apprise

Pour la poutre simplement appuyée, nous savons calculer $M_1 = 210Y_1 + 120Y_2$. Les coefficients, exprimés en mm, viennent des bras de levier et des réactions d'appui. Lorsque la loi des charges est connue, la covariance et la probabilité de dépassement décrivent l'exploitation.

Le chapitre suivant conserve cette poutre, mais change la question : *si nous disposions seulement de charges imposées et de moments mesurés, pourrions-nous retrouver ces coefficients ?* Les valeurs 210 et 120 deviennent des paramètres à identifier ; un intercept peut révéler un décalage de capteur. Pour apprendre séparément leurs effets, il faut faire varier les deux charges de façon suffisamment indépendante dans le plan d'essais.

La cible $\sigma_{\max}$ ajoutera une difficulté mécanique : la section la plus sollicitée peut changer avec les charges. Le substitut gaussien servira à approcher cette réponse et à exprimer ce que les données permettent d'en connaître. La loi des charges en service demeure une information distincte du choix des essais.

Bilan du chapitre : une démarche à pouvoir reconstruire. À partir d'une structure donnée, l'étudiant doit pouvoir expliquer pourquoi il choisit une marge en force, en contrainte ou en déplacement, puis distinguer les paramètres fixés des grandeurs aléatoires. Le calcul de la réponse vient de la mécanique ; celui de ses moments et de ses dépassements vient de la loi jointe des entrées. Enfin, le résultat doit être accompagné d'une interprétation : événement par épreuve, hypothèses sur les charges, influence de leur dépendance et précision de l'estimation. Ces quatre étapes relient tous les outils du chapitre. Au chapitre suivant, la réponse mécanique elle-même devra parfois être identifiée à partir de données.

Bibliographie

[1] H. O. Madsen, S. Krenk, and N. C. Lind. *Methods of Structural Safety*. Dover Publications, Mineola, New York, 2006. URL https://orbit.dtu.dk/en/publications/methods-of-structural-safety/.

[2] NIST/SEMATECH. e-Handbook of Statistical Methods. National Institute of Standards and Technology. URL https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/. Sections 1.3.6.6.1, 1.3.6.6.2, 1.3.6.6.9, 8.1.2.3, 8.1.6.1 et 8.2.1.3. Consulté le 30 octobre 2026.