Université de Technologie de Compiègne

Chapitre I / Modélisation stochastique en mécanique

Fiabilité et dimensionnement des structures

Relier les aléas de charge au risque de rupture d'une structure

Master Structures et Systèmes Mécaniques Complexes (SMC)

Mokhtar Z. Alaya et Salim Bouzebda

Version 2026

Fiabilité : du chargement à la décision

Quel événement rend la structure inacceptable ?

Comment décrire les charges et la résistance ?

Comment calculer le risque et choisir une section ?

Partie A · Résistance et sollicitation

Une barre : identifier la contrainte et la résistance.

Une marge : traduire le dépassement en événement.

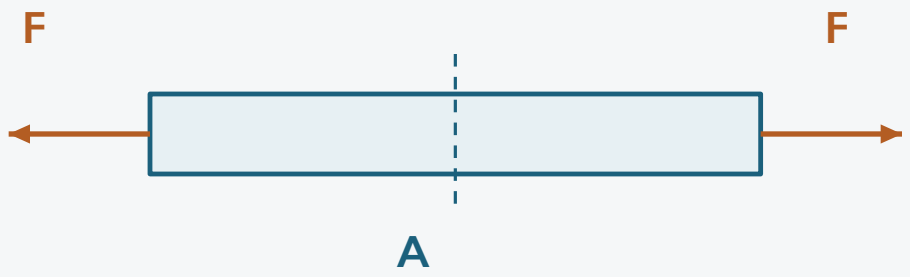
Une loi : calculer la fréquence des cas défavorables.

Une estimation : contrôler la précision du calcul.

Une barre sous une force incertaine

Un modèle de rupture relie la charge, la section et la résistance du matériau.

Objet mécanique



Traduction probabiliste

F : force appliquée (N = newton)

A : section résistante, en mm²

$$S = \frac{F}{A} \quad (\mathrm{MPa})$$

R : contrainte de résistance (MPa).
Le matériau, le lot et les défauts la font varier.

$$g = R - S = R - \frac{F}{A} \qquad g > 0 : \text{ réserve;} \quad g \leq 0 : \text{ défaillance}$$

Une section change le risque

Exemple illustratif : augmenter la section de 25 % diminue la contrainte de 20 %.

Même force : F = 20 kN



A = 80 mm²



A = 100 mm²

Même résistance aléatoire

$$R/(1\,\mathrm{MPa}) \sim \mathcal{N}\left(250, 25^2\right)$$

Contrainte : 250 MPa

Risque de rupture : 50 %

Contrainte : 200 MPa

Risque de rupture : 2,3 %

La section agit sur la sollicitation ; la dispersion de résistance reste présente.

Une épreuve associe résistance et charge

Une épreuve associe une pièce et un chargement.

Une autre épreuve peut changer la résistance, la force, ou les deux.

La loi décrit cette population. Les données servent à estimer ses paramètres.

Définition 1.2 · État limite et fiabilité

Soit $\boldsymbol{X}$ le vecteur des entrées aléatoires d'un modèle mécanique et g une fonction mesurable. Avec la convention retenue dans ce cours, $\{g(\boldsymbol{X}) \leq 0\}$ est l'événement de défaillance et $\{g(\boldsymbol{X}) > 0\}$ l'événement de fonctionnement sûr. Dans le modèle résistance–sollicitation, R et S sont définies sur le même espace probabilisé, dans la même unité, et

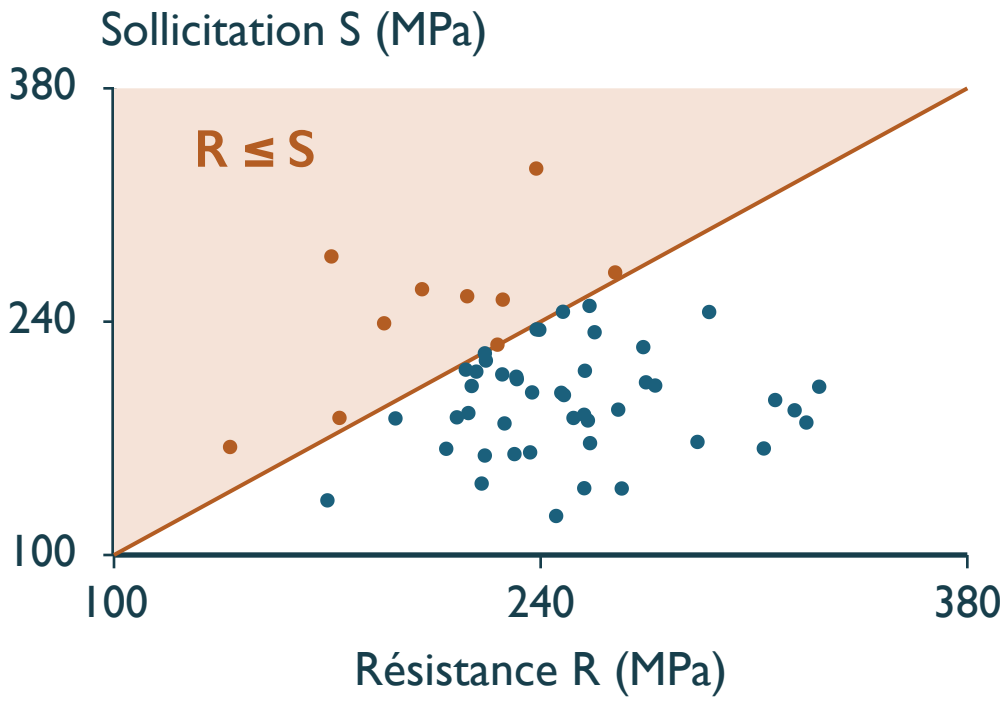
$$g(R, S) = R - S, \qquad P_f = \mathbb{P}(g \leq 0), \qquad \mathcal{R} = 1 - P_f.$$

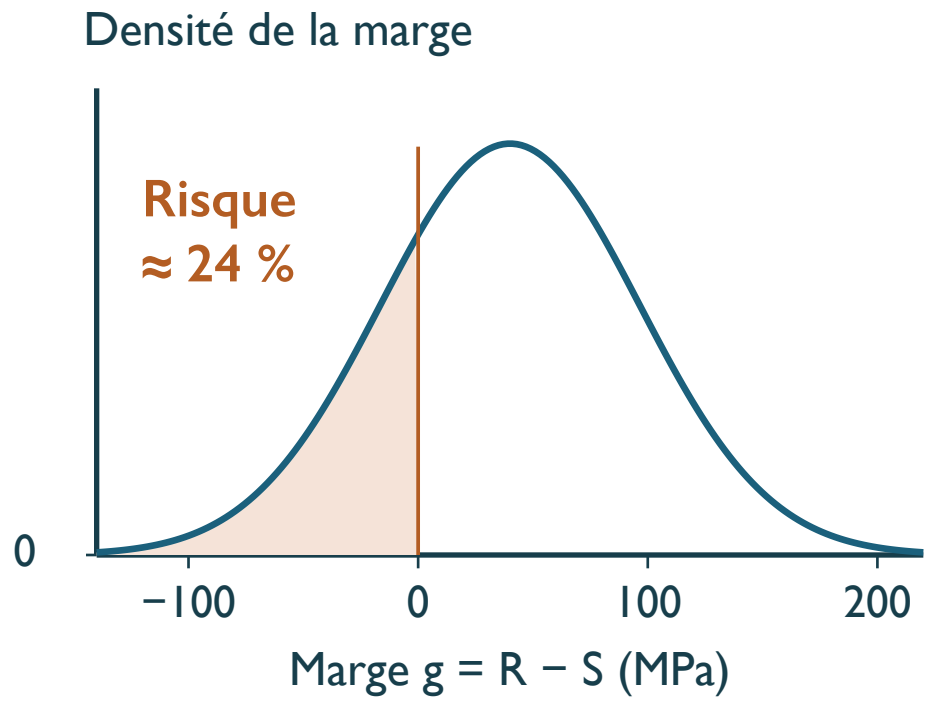
La fiabilité $\mathcal{R}$ se rapporte au critère et à l'épreuve ainsi définis.

Repère d'unité : $1\,\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/mm^2}$.

La défaillance est une région

R et S gaussiennes indépendantes : moyennes 240/200 MPa, écarts-types 40 MPa.





Calculer un risque revient à mesurer la probabilité de la région de défaillance.

Définition 1.1 · Loi, densité et moments

Pour une variable aléatoire réelle X, la fonction de répartition est $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. La loi admet une densité f_X si $f_X \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_X(u)\mathrm{d}u = 1$ et, pour $a \leq b$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u, \qquad \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(u)\mathrm{d}u.$$

Lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la moyenne et la variance sont

$$m_X = \mathbb{E}[X], \quad s_X^2 = \mathbb{E}[(X - m_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - m_X^2.$$

L'écart-type est $s_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

La répartition donne la fraction des pièces dont la résistance reste sous une sollicitation donnée. Les moments résument ensuite le niveau et la dispersion de cette population.

Proposition 1.3 · Calcul de la probabilité de défaillance

Si (R, S) admet une densité jointe $f_{R,S}$ et prend ses valeurs dans $[0, \infty)^2$, alors

$$P_f = \int_0^\infty \int_0^s f_{R,S}(r, s)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s.$$

Si R et S sont indépendantes, sans condition de positivité ni d'existence d'une densité, on a

$$P_f = \int F_R(s)\, \mathrm{d}F_S(s).$$

L'intégrale est prise par rapport à la loi de S. Si celle-ci admet une densité f_S, elle devient $\int_{\mathbb{R}} F_R(s) f_S(s) \mathrm{d}s$.

On évalue le risque pour chaque sollicitation, puis on le moyenne sur les sollicitations possibles. L'indépendance permet alors d'utiliser séparément les deux lois.

Remarque 1.4 · Égalité au seuil et dépendance

Remplacer $R \leq S$ par $R < S$ conserve la probabilité uniquement si $\mathbb{P}(R = S) = 0$. Les lois marginales seules ne déterminent pas P_f en présence de dépendance. Une dépendance peut apparaître si résistance et charge varient avec la même température. Une corrélation nulle ne garantit pas l'indépendance, sauf dans des cadres particuliers, notamment celui d'un vecteur conjointement gaussien.

Le mécanisme motive le choix de loi

La forme d'une loi se justifie par un mécanisme et se confronte aux données.

Uniforme



Temps d'observation uniforme
et vitesse constante

Normale



Somme de petites erreurs
indépendantes

Lognormale



Produit de facteurs positifs
Logarithme = somme

Exponentielle



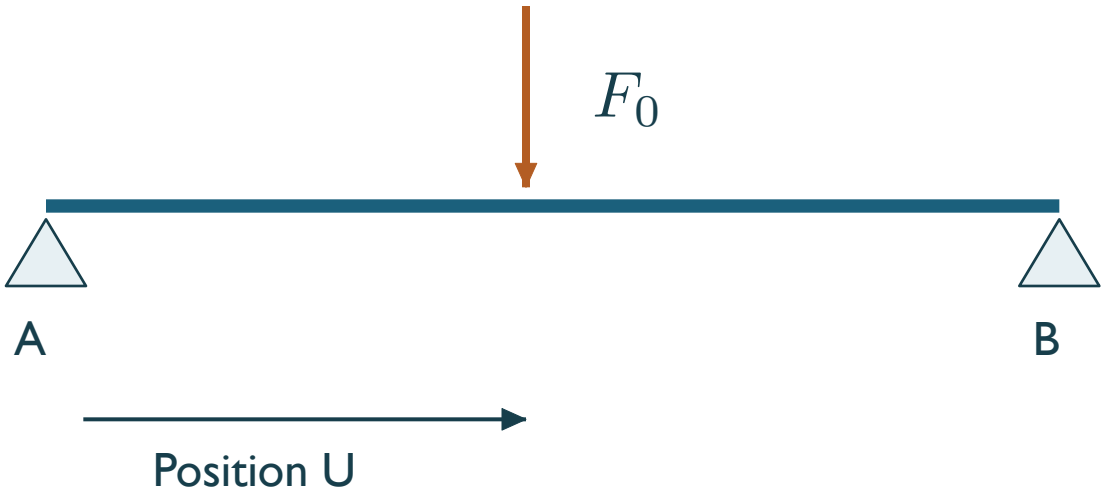
Taux instantané de panne
constant dans le temps

Vérifier le mécanisme et les données : les bornes ou la positivité ne suffisent pas.

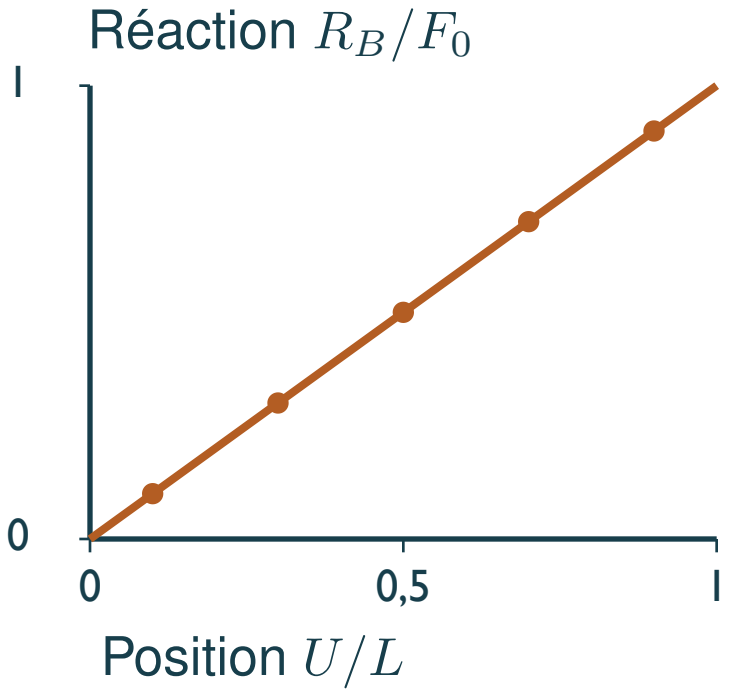
Loi uniforme · Le rôle de l'observation

L : longueur de la traversée. La vitesse v est constante et positive.

Une force mobile à vitesse constante



$$T \sim \mathcal{U}[0, L/v], \quad U = vT \sim \mathcal{U}[0, L]$$



La loi uniforme vient du mécanisme d'observation, pas seulement de bornes connues.

Exemple 1.5 · Deux lois uniformes indépendantes (1/2)

À titre illustratif, prenons $R \sim \mathcal{U}[200, 300]$ MPa et $S \sim \mathcal{U}[150, 250]$ MPa, indépendantes. La marge moyenne vaut $250 - 200 = 50$ MPa. Pour une sollicitation s, on a

$$F_R(s) = \begin{cases} 0, & s < 200, \\ (s - 200)/100, & 200 \leq s \leq 300, \\ 1, & s > 300. \end{cases}$$

Exemple 1.5 · Deux lois uniformes indépendantes (2/2)

Les valeurs sont exprimées en MPa. Seul $200 \leq s \leq 250$ contribue à la rupture et $f_S = 1/100$ MPa^{-1} sur son support, d'où

$$P_f = \int_{150}^{250} F_R(s) \frac{\mathrm{d}s}{100} = \int_{200}^{250} \frac{s-200}{10000}\,\mathrm{d}s$$
$$= \left[\frac{(s-200)^2}{20000}\right]_{200}^{250} = \frac{50^2}{20000} = 0{,}125.$$

La région de rupture est un triangle ; le calcul donne une probabilité sans dimension. Une marge moyenne positive n'exclut donc pas le risque de 12,5 %.

Proposition 1.6 · Fiabilité et coefficient de sécurité

Soient $R \sim \mathcal{U}[r_1, r_2]$ et $S \sim \mathcal{U}[s_1, s_2]$ indépendantes, exprimées dans la même unité, avec $0 < s_1 < r_1 < s_2 < r_2$. Alors

$$P_f = \mathbb{P}(R \leq S) = \frac{(s_2 - r_1)^2}{2(r_2 - r_1)(s_2 - s_1)},$$

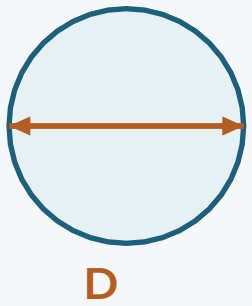
$$\tau = \mathbb{E}\left[\frac{R}{S}\right] = \frac{(r_1 + r_2)\log(s_2/s_1)}{2(s_2 - s_1)}.$$

Ces deux grandeurs sont sans dimension. La formule de P_f utilise l'ordre indiqué des bornes ; celle de τ utilise notamment $s_1 > 0$, qui évite une singularité du quotient près de zéro.

Loi normale · Additionner des erreurs

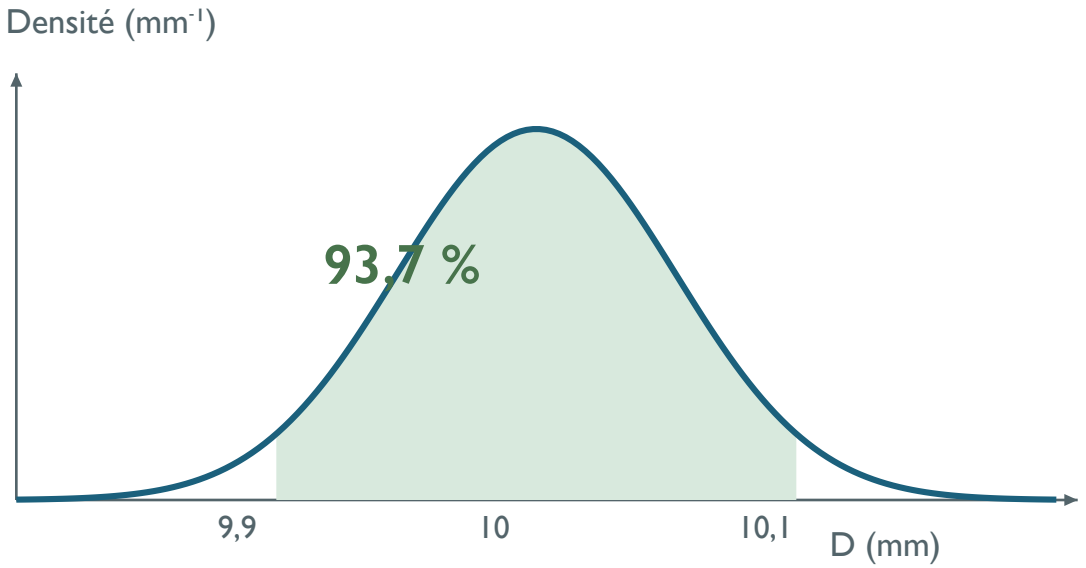
Diamètre nominal : 10 mm. Trois erreurs centrées, indépendantes et normales.

Diamètre d'un axe usiné



$$s_{\varepsilon_1} = 0{,}02\,\text{mm}$$
$$s_{\varepsilon_2} = 0{,}03\,\text{mm}$$
$$s_{\varepsilon_3} = 0{,}04\,\text{mm}$$

$$s_D = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}03^2 + 0{,}04^2} \simeq 0{,}0539\,\text{mm}$$

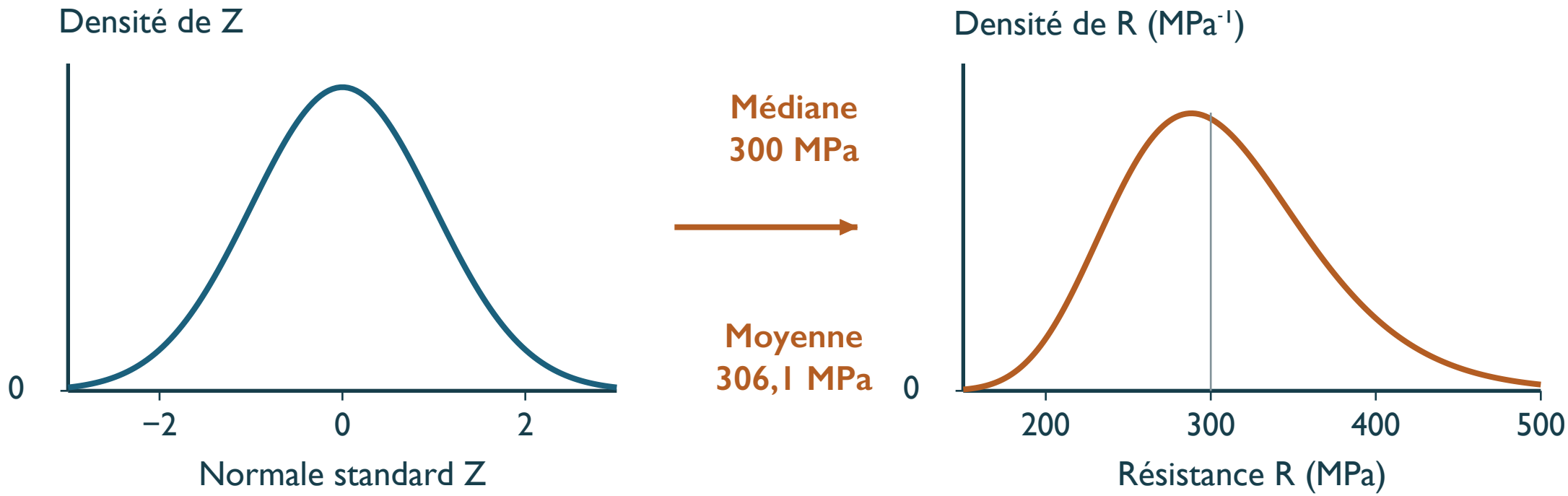


L'indépendance annule les covariances : les variances s'ajoutent.
L'écart-type est la racine de cette somme.

Loi lognormale · Changer d'échelle

Des facteurs relatifs multiplicatifs deviennent additifs après passage au logarithme.

$$R = 300\,\mathrm{MPa}\ e^{0{,}2Z}$$



La positivité et l'asymétrie apparaissent lorsque l'on revient à l'échelle mécanique.

Proposition 1.7 · Paramétrer une loi lognormale

Fixons une unité de référence et notons X la valeur numérique positive de la grandeur dans cette unité. Si $X = \exp(Z)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, s_Z^2)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu_Z + s_Z^2/2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = (e^{s_Z^2} - 1)e^{2\mu_Z + s_Z^2}.$$

Une moyenne physique $m_X > 0$ et un coefficient de variation c_X donnent donc

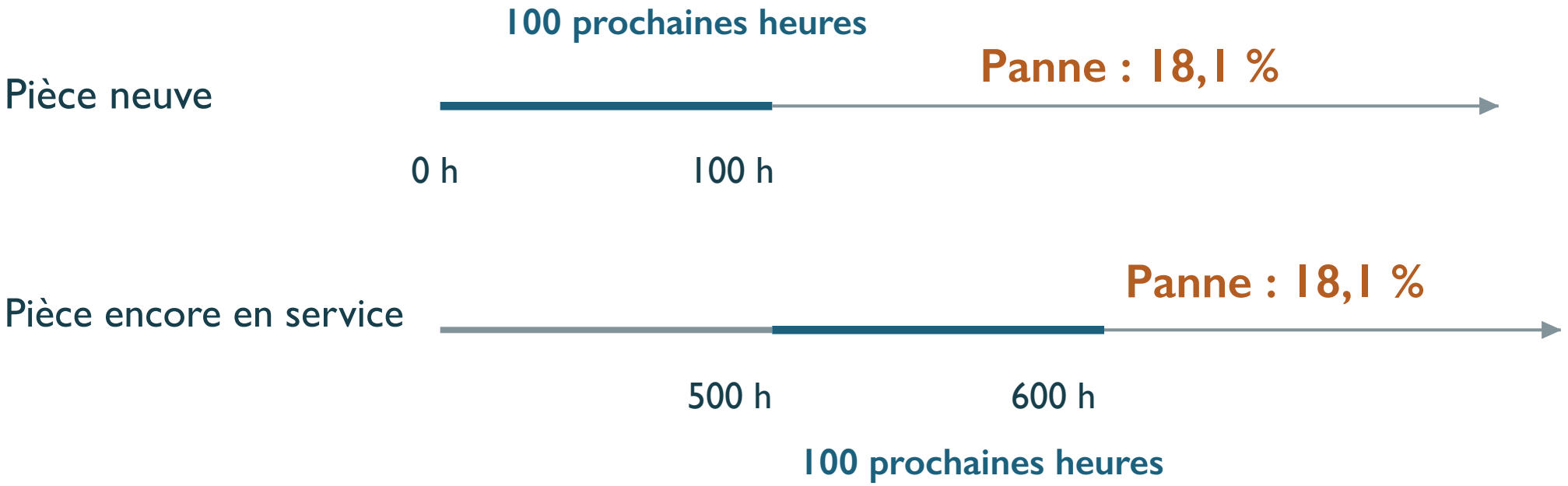
$$s_Z^2 = \log(1 + c_X^2), \qquad \mu_Z = \log(m_X) - \frac{1}{2}\log(1 + c_X^2).$$

Les essais fournissent une moyenne physique et une dispersion relative. Ces relations les convertissent en paramètres du logarithme pour simuler une grandeur positive.

Loi exponentielle · Une attente sans vieillissement

On compare le prochain intervalle de 100 h, sachant que la pièce fonctionne au départ.

Même taux conditionnel : $\lambda = 0{,}002\ h^{-1}$



La durée déjà écoulée ne modifie pas la loi de l'attente restante dans ce modèle.

Niveau moyen et dispersion physique

La moyenne est le niveau obtenu sur un grand nombre d'épreuves comparables.

L'écart-type mesure la dispersion dans la même unité.

Le coefficient de variation compare les dispersions relatives.

$$m = \mathbb{E}[X], \qquad s^2 = \mathbb{E}\big[(X-m)^2\big]$$

$$s^2 = \mathbb{E}[X^2] - m^2, \qquad c_v = \frac{s}{m} \quad (m > 0)$$

La dépendance fait partie du modèle

Une même condition peut agir sur plusieurs grandeurs : il faut modéliser leur lien.



$$\mathrm{Var}(R - S) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{Var}(S) - 2\,\mathrm{Cov}(R, S)$$

Une corrélation nulle exclut une liaison linéaire mesurée, pas toute dépendance.

Définition 1.8 · Covariance et corrélation

Pour deux variables R, S de moments d'ordre deux finis, on définit

$$\mathrm{Cov}(R, S) = \mathbb{E}[(R - m_R)(S - m_S)].$$

Si $s_R s_S > 0$, leur coefficient de corrélation est $\rho = \mathrm{Cov}(R, S)/(s_R s_S) \in [-1, 1]$. La covariance s'exprime dans le produit des unités ; la corrélation est sans dimension et mesure une liaison linéaire.

La covariance décrit les fluctuations communes de deux grandeurs. La corrélation permet de comparer ce lien sans dépendre de leurs unités.

Proposition 1.9 · Moments d'une marge

Si $\mathbb{E}[R^2] + \mathbb{E}[S^2] < \infty$, alors, sans hypothèse de loi ni d'indépendance,

$$\mathbb{E}[R - S] = m_R - m_S, \quad \mathrm{Var}(R - S) = s_R^2 + s_S^2 - 2\,\mathrm{Cov}(R, S).$$

Deux causes qui varient ensemble peuvent se compenser dans une différence. Le signe du terme de covariance vient donc du critère mécanique retenu.

Théorème 1.10 · Fiabilité d'une marge gaussienne

Supposons (R, S) conjointement gaussien, avec $s_R, s_S > 0$, et posons $s_g^2 = s_R^2 + s_S^2 - 2\rho s_R s_S > 0$. La marge $g = R - S$ suit la loi $\mathcal{N}(m_R - m_S, s_g^2)$. Si Φ désigne la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, l'indice de fiabilité signé et la probabilité de défaillance sont

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{s_R^2 + s_S^2 - 2\rho s_R s_S}}, \qquad P_f = \Phi(-\beta).$$

La formule vaut aussi lorsque $m_R < m_S$: l'indice β est alors négatif.

L'indice mesure la réserve moyenne en nombre d'écarts-types de la marge. La normalité transforme cette distance signée au seuil en une probabilité de rupture.

Remarque 1.11 · Portée de la formule gaussienne

La connaissance des deux premiers moments ne suffit pas à établir $P_f = \Phi(-\beta)$; le calcul précédent utilise la normalité de la marge. Deux marginales normales ne garantissent pas, à elles seules, une loi jointe gaussienne. Si $s_g = 0$, la marge est déterministe presque sûrement : $P_f = \mathbf{1}_{m_R - m_S \leq 0}$, sans division par un écart-type nul.

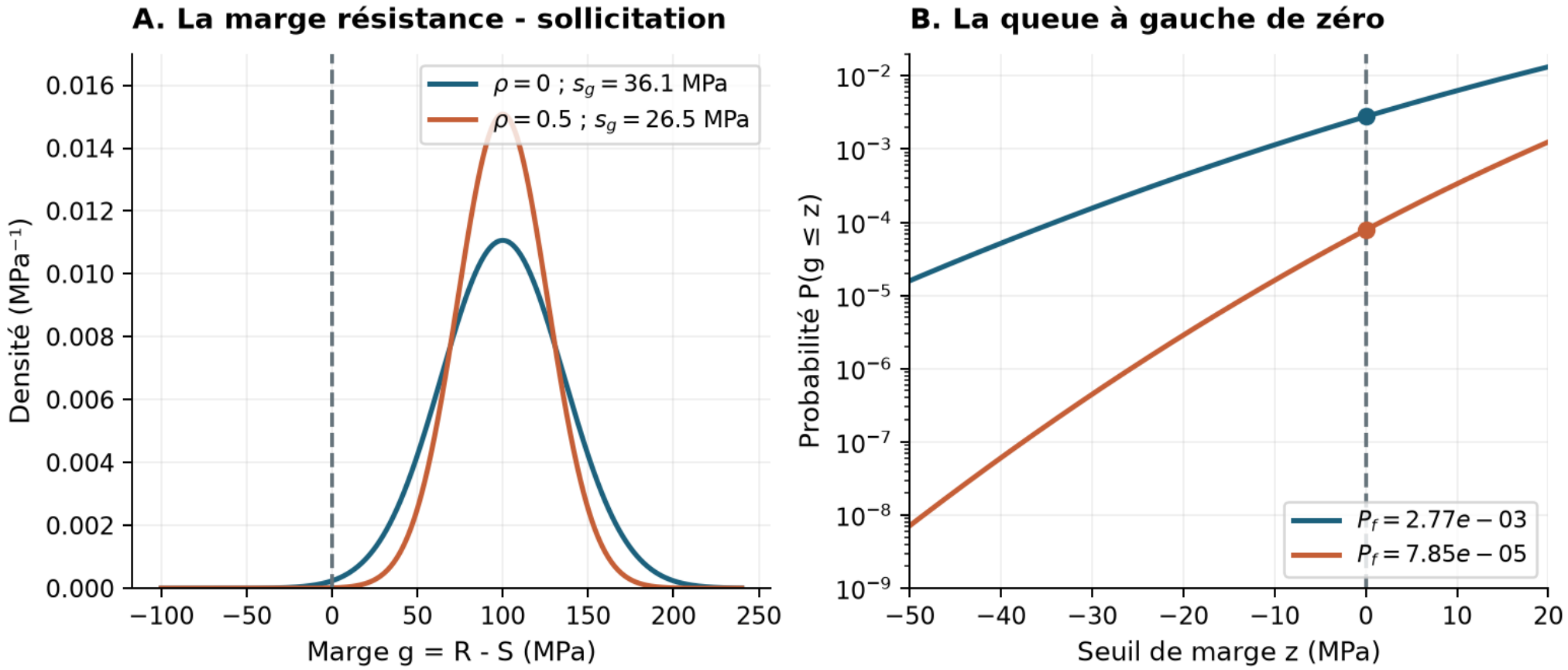
Connaître une moyenne et une variance ne suffit pas à connaître une queue de distribution. La décision de dimensionnement dépend aussi de la loi retenue pour la marge.

Exemple 1.12 · Marge gaussienne en contrainte

Sous les hypothèses du théorème 1.10.

Pour $m_R = 300$, $s_R = 30$, $m_S = 200$, $s_S = 20$, en MPa, et $\rho = 0$, $\beta = 100/\sqrt{1300} \simeq 2{,}77$ et $P_f \simeq 0{,}002773$. Les lois normales peuvent prendre des valeurs négatives ; leur pertinence est une hypothèse physique à discuter. Une loi lognormale est une possibilité lorsque la positivité est essentielle.

L’effet d’une corrélation positive



Ici, ρ = 0,5 réduit la dispersion de R − S et la probabilité de rupture

Corollaire 1.13 · Fiabilité de deux grandeurs lognormales

Soient $R, S > 0$, exprimées dans une même unité de référence, avec $\log R \sim \mathcal{N}(\mu_R, v_R)$ et $\log S \sim \mathcal{N}(\mu_S, v_S)$ indépendantes, et $v_R + v_S > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(R \leq S) = \Phi\left(-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{v_R + v_S}}\right).$$

Chaque essai produit un indicateur

Huit valeurs fictives illustrent le calcul ; elles ne constituent pas une estimation précise.

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8
R (MPa)	238	278	251	220	265	291	244	273
S (MPa)	210	230	260	214	280	250	242	267
R − S	28	48	-9	6	-15	41	2	6
Rupture ?	non	non	oui	non	oui	non	non	non

2 ruptures sur 8 essais fictifs : fréquence = 0,25

La moyenne des marges et la fréquence de rupture répondent à des questions différentes.

Théorème 1.14 · Estimation Monte-Carlo d'une probabilité

Soient $(R_j, S_j)_{j\geq 1}$ des couples indépendants et de même loi que (R, S), et $p = P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$. Les deux composantes d'un même couple peuvent être dépendantes. Pour $N \geq 1$, l'estimateur

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{R_j \leq S_j}, \quad \mathbb{E}[\widehat{P}_f] = P_f, \quad \mathrm{Var}(\widehat{P}_f) = \frac{P_f(1-P_f)}{N}$$

est sans biais et converge presque sûrement vers P_f lorsque $N \to \infty$.

Si $0 < P_f < 1$, il vérifie en outre

$$\frac{\widehat{P}_f - P_f}{\sqrt{P_f(1-P_f)/N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

La précision statistique du comptage

La variance de l'estimateur décroît comme 1/N

Quatre fois plus de tirages divisent l'erreur standard par deux

$$\mathrm{Var}(\widehat{p}_N) = \frac{p(1-p)}{N}$$

$$\widehat{\mathrm{SE}} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_N(1-\widehat{p}_N)}{N}}$$

Remarque 1.15 · Un intervalle normal est une approximation

L'intervalle $\widehat{P}_f \pm 1{,}96\sqrt{\widehat{P}_f(1-\widehat{P}_f)/N}$ est un intervalle de confiance asymptotique à 95 %. Il n'est pas adapté à un nombre faible ou nul de défaillances. On peut alors employer un intervalle binomial exact ou de Wilson ; ce dernier reste une approximation.

Proposition 1.16 · Borne binomiale après zéro défaillance

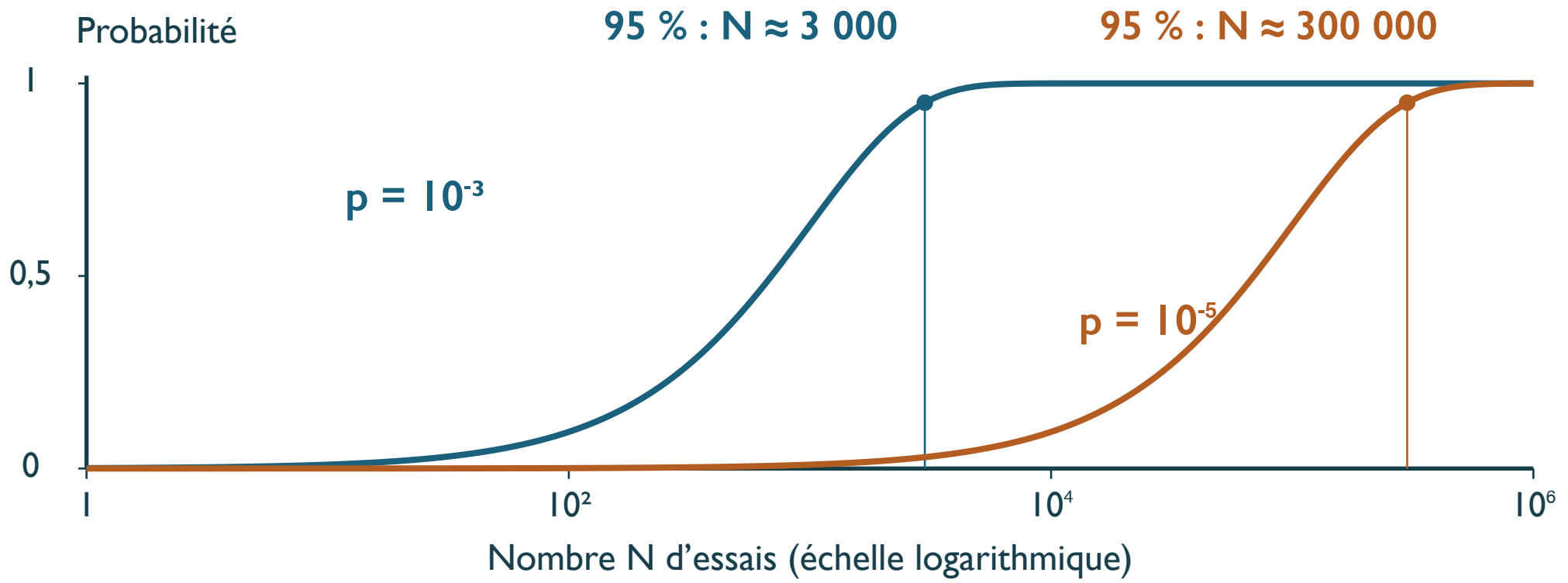
Fixons à l'avance $N \geq 1$ essais indépendants de même probabilité de défaillance p, et $\alpha \in (0, 1)$. Si aucune défaillance n'est observée, la borne supérieure de la procédure binomiale exacte unilatérale de confiance $1 - \alpha$ est

$$p_{\sup} = 1 - \alpha^{1/N}.$$

L'absence de rupture observée ne prouve pas un risque nul. La borne précise ce que le nombre d'essais permet d'exclure avec la procédure de confiance choisie.

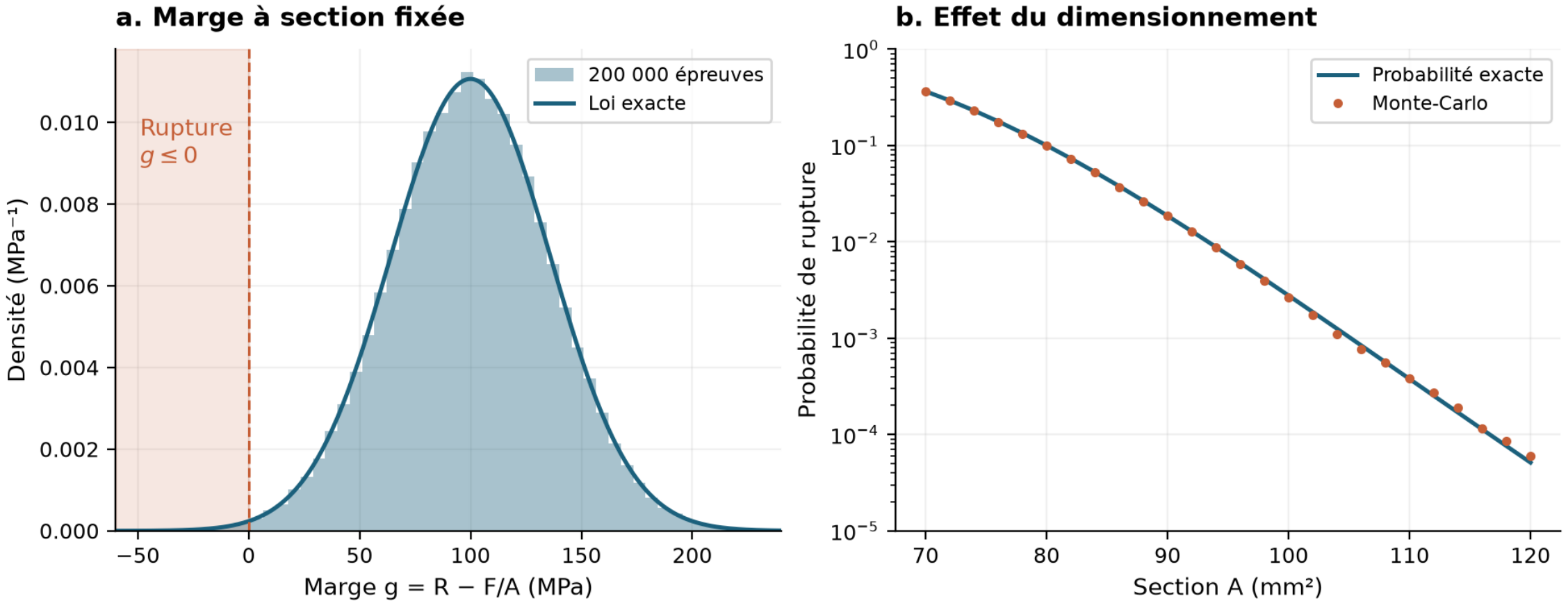
Le coût d'observation d'un événement rare

Pour des essais indépendants : P(au moins une rupture) = $1 - (1 - p)^N$.



Voir une rupture avec forte probabilité ne suffit pas encore à estimer précisément le risque.

L’effet du dimensionnement



Augmenter la section réduit la contrainte F/A et le risque de rupture dans ce modèle

Remarque 1.17 · Sources d'erreur distinctes

La *variabilité physique* est celle des contraintes entre épreuves. L'*erreur d'échantillonnage* est celle de la fréquence calculée sur un nombre fini d'épreuves ; elle diminue lorsque N augmente. Enfin, une *erreur de modèle* apparaît si la loi des charges ou le critère de ruine représente mal la situation réelle. Augmenter N ne corrige pas cette dernière. Quand la réponse mécanique est approchée par un maillage ou un schéma temporel, une erreur de discrétisation s'ajoute encore : elle doit être étudiée séparément de la taille de l'échantillon. Cette distinction sera réutilisée pour le substitut du chapitre 2 et les trajectoires du chapitre 4.

Partie B · Reprendre la poutre de l'introduction

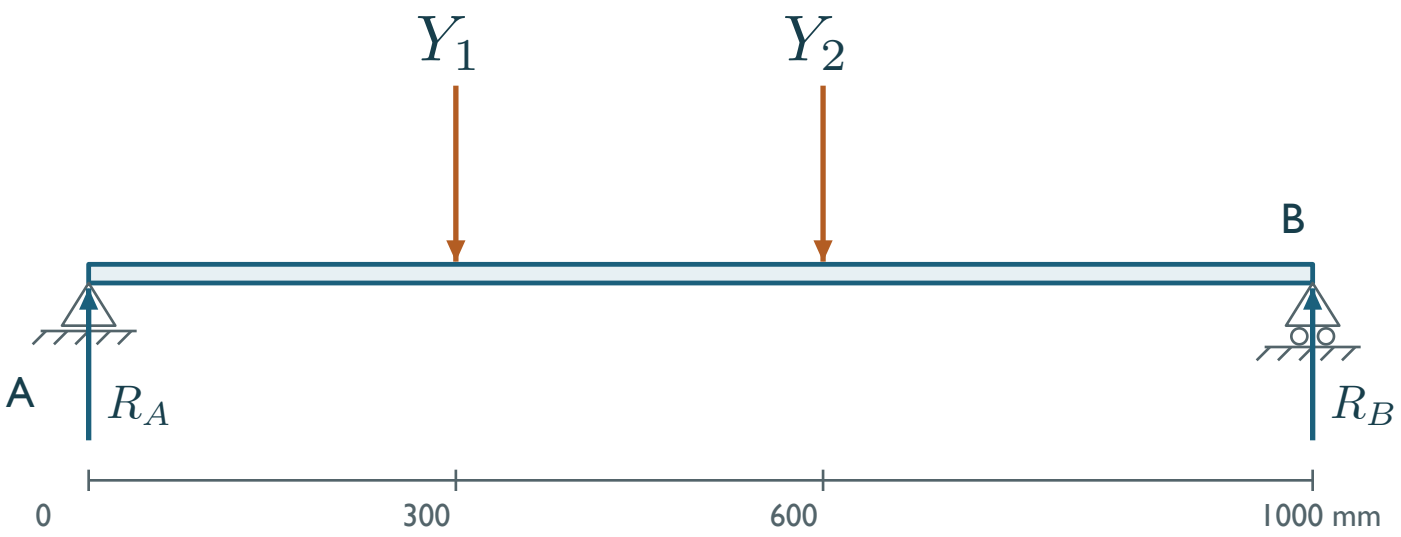
La poutre conserve ses appuis et ses deux positions de charge.

Une épreuve fournit un couple de charges et tout un profil de moment.

La rupture peut se produire à plusieurs sections.

La poutre à deux charges

L'équilibre fixe les réactions ; le moment se calcule ensuite par section.



Équilibre et sections critiques

$$R_A = 0{,}7Y_1 + 0{,}4Y_2$$
$$R_B = 0{,}3Y_1 + 0{,}6Y_2$$

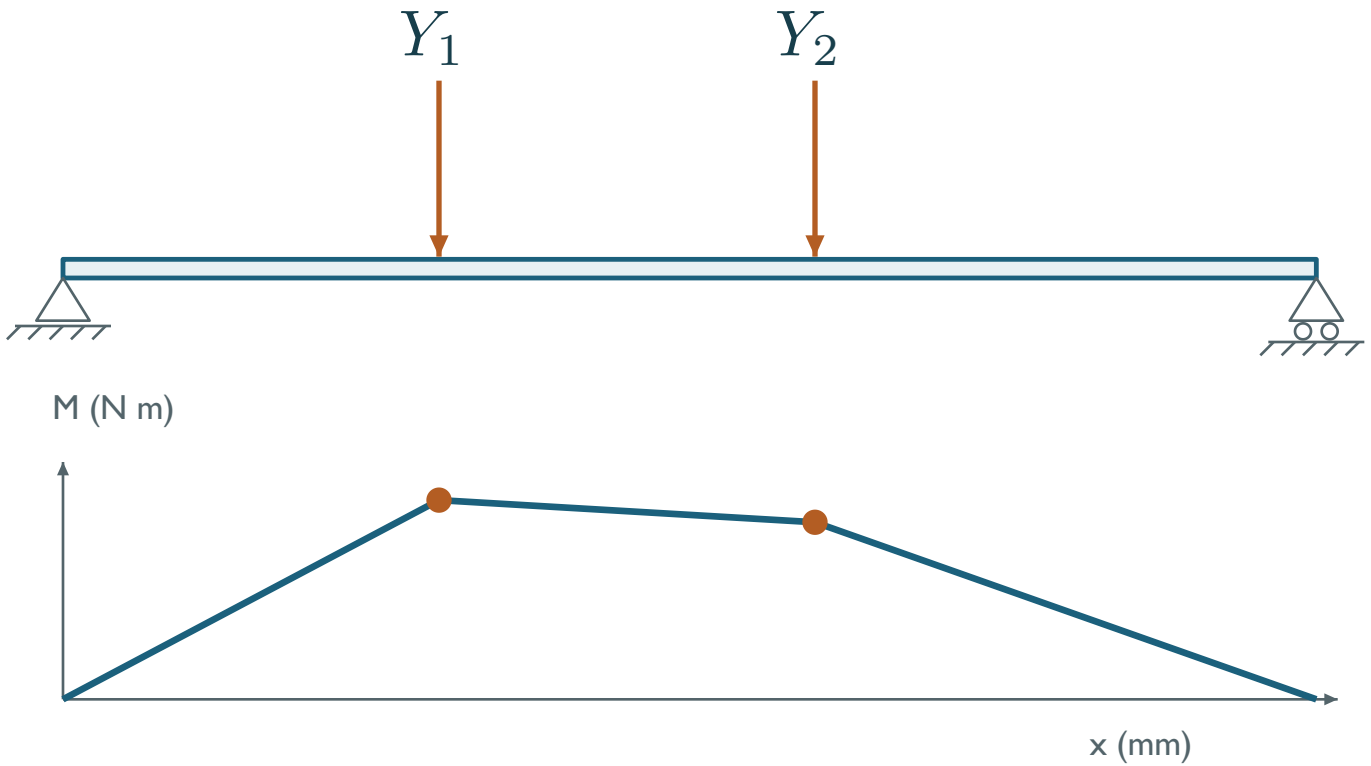
$$M_1 = 210Y_1 + 120Y_2$$
$$M_2 = 120Y_1 + 240Y_2$$

$$W = 1800\,\mathrm{mm}^3$$

Avec Y en N et les longueurs en mm : M est en N mm et M/W est en MPa.

La cohérence spatiale d'un chargement

Un seul tirage des deux charges engendre tout le diagramme de moment.



Une réalisation complète

$$Y_1 = 800\,\mathrm{N}, \quad Y_2 = 400\,\mathrm{N}$$

$$M_1 = 216\,\mathrm{N\,m}$$

$$M_2 = 192\,\mathrm{N\,m}$$

$$\sigma_{\max} = 120\,\mathrm{MPa}$$

Les sections d'une même poutre ne sont pas deux expériences indépendantes.

Lemme 1.18 · Maximum d'un profil affine par morceaux

Si m est continue sur $[a, b]$ et affine sur chaque intervalle d'une subdivision finie $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, alors

$$\max_{x \in [a,b]} |m(x)| = \max_{0 \le i \le n} |m(x_i)|.$$

Le diagramme de moment est affine entre les forces ponctuelles. Cette propriété permet de vérifier seulement les sections aux charges et aux appuis, sans approximation par maillage.

Proposition 1.19 · Réponse de la poutre sous deux forces (1/2)

Une poutre simplement appuyée de longueur $L = 1000$ mm porte Y_1 à $0{,}3L$ et Y_2 à $0{,}6L$. Son module de résistance est $W = 1800$ mm^3. Dans le modèle statique de flexion adopté, avec géométrie fixée et sans autre chargement, les réactions sont

$$R_A = 0{,}7Y_1 + 0{,}4Y_2, \qquad R_B = 0{,}3Y_1 + 0{,}6Y_2.$$

Avec $a_+ = \max(a, 0)$ et une convention de moment positif en flexion sagissante,

$$M(x) = R_A x - Y_1(x - 0{,}3L)_+ - Y_2(x - 0{,}6L)_+.$$

Ainsi les deux moments aux charges vérifient

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = A\boldsymbol{Y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{pmatrix} \text{ mm}.$$

Proposition 1.19 · Réponse de la poutre sous deux forces (2/2)

Le moment est affine entre deux points de charge. Le maximum de sa valeur absolue est donc atteint à une extrémité de ces intervalles. Comme les moments aux appuis sont nuls, la contrainte maximale en valeur absolue est

$$\sigma_{\max} = \frac{\max(|M_1|, |M_2|)}{W}.$$

La valeur absolue permet de traiter correctement les faibles probabilités de charges négatives induites par l'approximation gaussienne.

L'effet de la covariance dépend de la réponse

Dans la marge, les fluctuations communes peuvent se compenser.

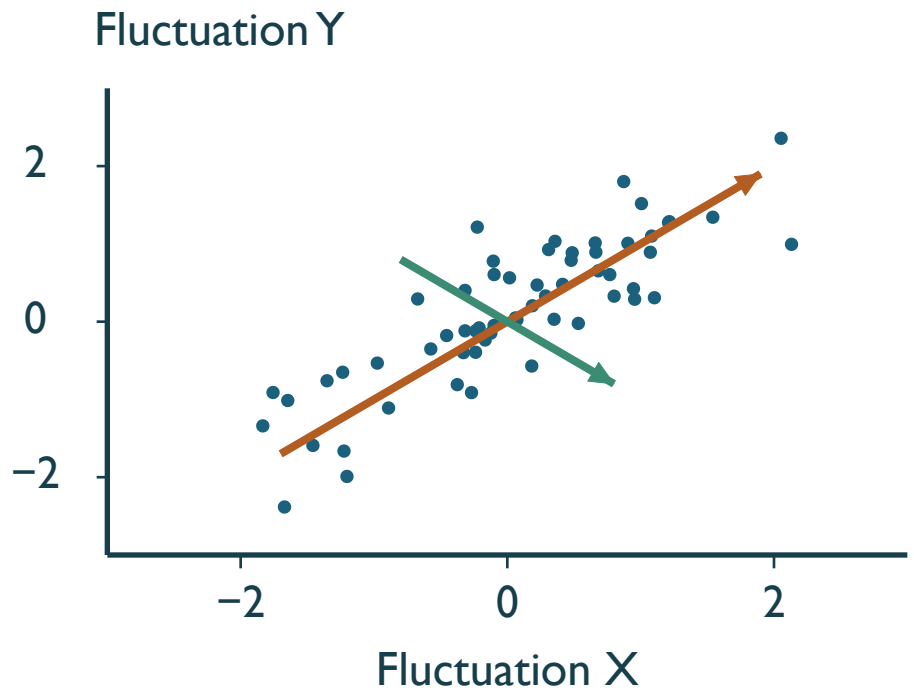
Dans un moment, les charges de même sens peuvent se renforcer.

$$g = R - S, \qquad \mathrm{Var}(g) = s_R^2 + s_S^2 - 2\,\mathrm{Cov}(R, S),$$

$$M = aY_1 + bY_2, \quad \mathrm{Var}(M) = a^2 s_1^2 + b^2 s_2^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Somme et différence : deux effets de la corrélation

Une corrélation positive ne produit pas le même effet sur toutes les réponses.



$$\rho = 0{,}8, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$$

Somme : fluctuations renforcées

$$\mathrm{Var}(X + Y) = 2 + 2\rho = 3{,}6$$

Différence : fluctuations compensées

$$\mathrm{Var}(X - Y) = 2 - 2\rho = 0{,}4$$

Le signe des coefficients mécaniques détermine l'effet des termes de covariance.

Définition 1.20 · Vecteur gaussien

Un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$ est gaussien si toute combinaison linéaire $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, suit une loi normale, éventuellement de variance nulle. On note $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$, où

$$\boldsymbol{m} = \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}], \qquad V = \mathbb{E}[(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})^\top].$$

La matrice V est symétrique positive au sens large. La normalité de chaque composante séparément ne suffit pas à définir un vecteur gaussien.

Les deux charges doivent être décrites conjointement car elles peuvent partager une même cause. Leurs lois séparées ne fixent pas la dispersion des moments.

Un vecteur gaussien pour les charges

N désigne le newton. Les forces sont en N et leurs covariances en N².

La covariance relie les fluctuations des deux charges d'une même épreuve.

$$\mathbb{E}[Y] = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix} \mathrm{N}, \qquad V = 10^4 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathrm{N}^2$$

$$\rho = \frac{1/2}{\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$

Proposition 1.21 · Simulation gaussienne par Cholesky

Soit $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symétrique définie positive. Elle admet une unique factorisation $V = CC^{\mathsf{T}}$ avec C triangulaire inférieure à diagonale strictement positive. Si $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$, alors $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}$ suit la loi $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$.

Le même tirage de base contribue aux deux charges et crée leur dépendance. On simule ainsi un couple mécanique cohérent avant de calculer tout le diagramme de moment.

Simulation des charges par Cholesky

Deux normales standard sans dimension produisent le couple de charges.

$$Z_1, Z_2 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}, \quad CC^{\mathsf{T}} = V,$$

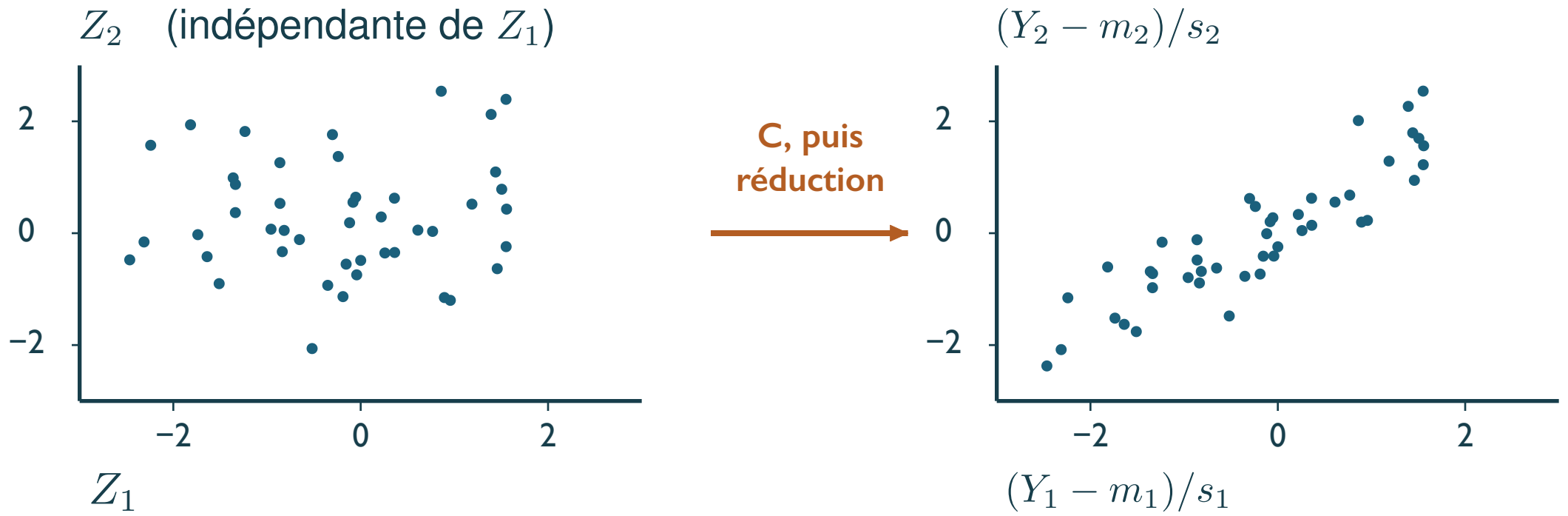
$$C = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix} \ (\mathrm{N}),$$

$$Y_1 = 800 + 100Z_1, \qquad Y_2 = 400 + 50Z_1 + \frac{50}{\sqrt{3}}Z_2 \quad (\mathrm{N}).$$

Le terme aléatoire commun aux deux lignes produit leur covariance.

La géométrie de Cholesky

Même paire de tirages : après mélange, $\rho = \sqrt{3}/2$ pour les deux charges.



Transformer un vecteur entier préserve la dépendance imposée par le modèle.

Proposition 1.22 · Propagation linéaire des moments

Soit $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$ de moments d'ordre deux finis, de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de covariance V. Pour une matrice déterministe A et $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{M}] = A\boldsymbol{m}, \qquad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{M}) = AVA^{\mathsf{T}}.$$

Ces identités ne demandent pas de loi gaussienne. Si, en outre, $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}, V)$, alors $\boldsymbol{M} \sim \mathcal{N}(A\boldsymbol{m}, AVA^{\mathsf{T}})$, avec une covariance éventuellement singulière.

La géométrie transforme les charges moyennes et leurs fluctuations par la même matrice.
On obtient ainsi la dispersion des moments sans lancer de simulation.

Exemple · Moyenne et covariance des moments

Les mêmes charges rendent les deux moments fortement corrélés.

Un moment en N mm divisé par W en mm³ donne une contrainte en MPa.

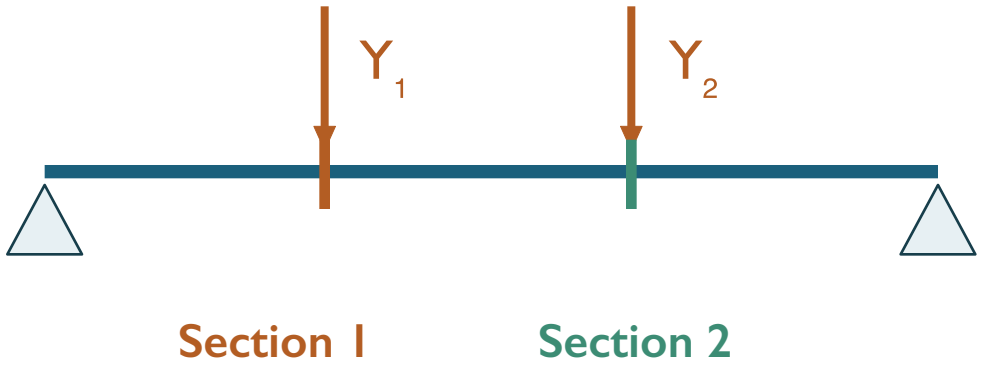
$$\mathbb{E}[\boldsymbol{M}] = \begin{pmatrix} 216000 \\ 192000 \end{pmatrix} \ (\mathrm{N\,mm}),$$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{M}) = 10^6 \begin{pmatrix} 741 & 672 \\ 672 & 624 \end{pmatrix} \ (\mathrm{N\,mm})^2.$$

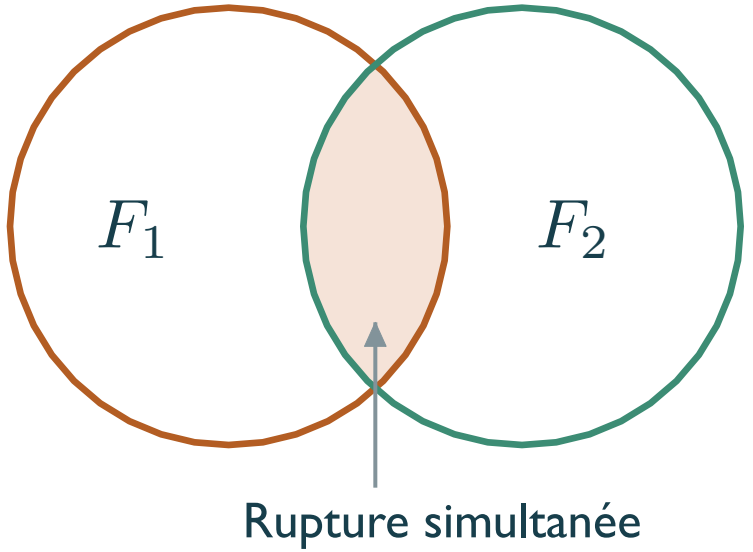
Une rupture peut concerner plusieurs sections

Les deux contraintes proviennent du même couple de charges : les événements sont liés.

Une réalisation du chargement



Événements de rupture



$$\mathbb{P}(F_1 \cup F_2) = \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$$

Une rupture simultanée ne doit être comptée qu'une fois dans le risque du système.

Proposition 1.24 · Bornes pour une rupture en plusieurs sections

Soient $W > 0$ et $\sigma_a > 0$ déterministes et $F_i = \{|M_i| \geq W\sigma_a\}$, pour $i = 1, 2$. Sans hypothèse d'indépendance entre les moments,

$$\max_i \mathbb{P}(F_i) \leq P_f = \mathbb{P}(F_1 \cup F_2) \leq \min\{1, \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2)\}.$$

Une défaillance locale suffit à rendre la poutre inacceptable. Les bornes tiennent compte du fait qu'une même épreuve peut dépasser les deux seuils.

Le seuil fixe la rareté de la rupture

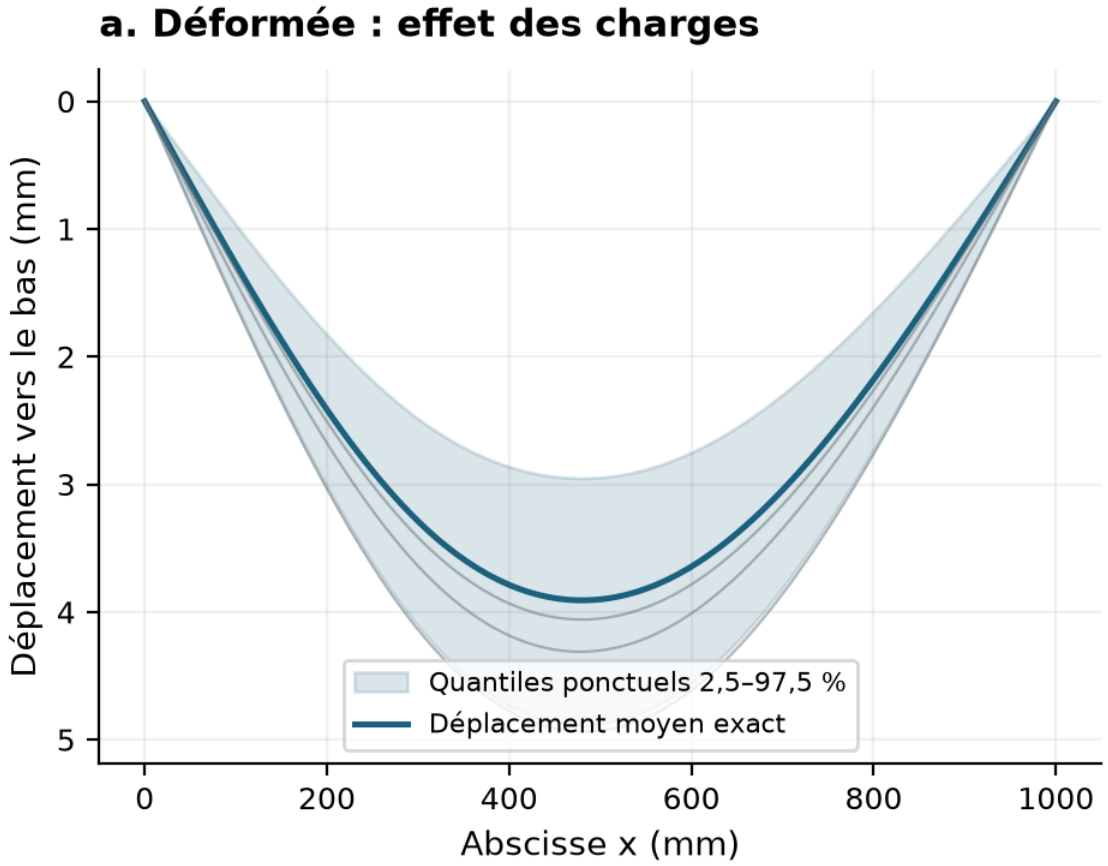
250 MPa : seuil de référence, trop rare pour un Monte-Carlo direct usuel

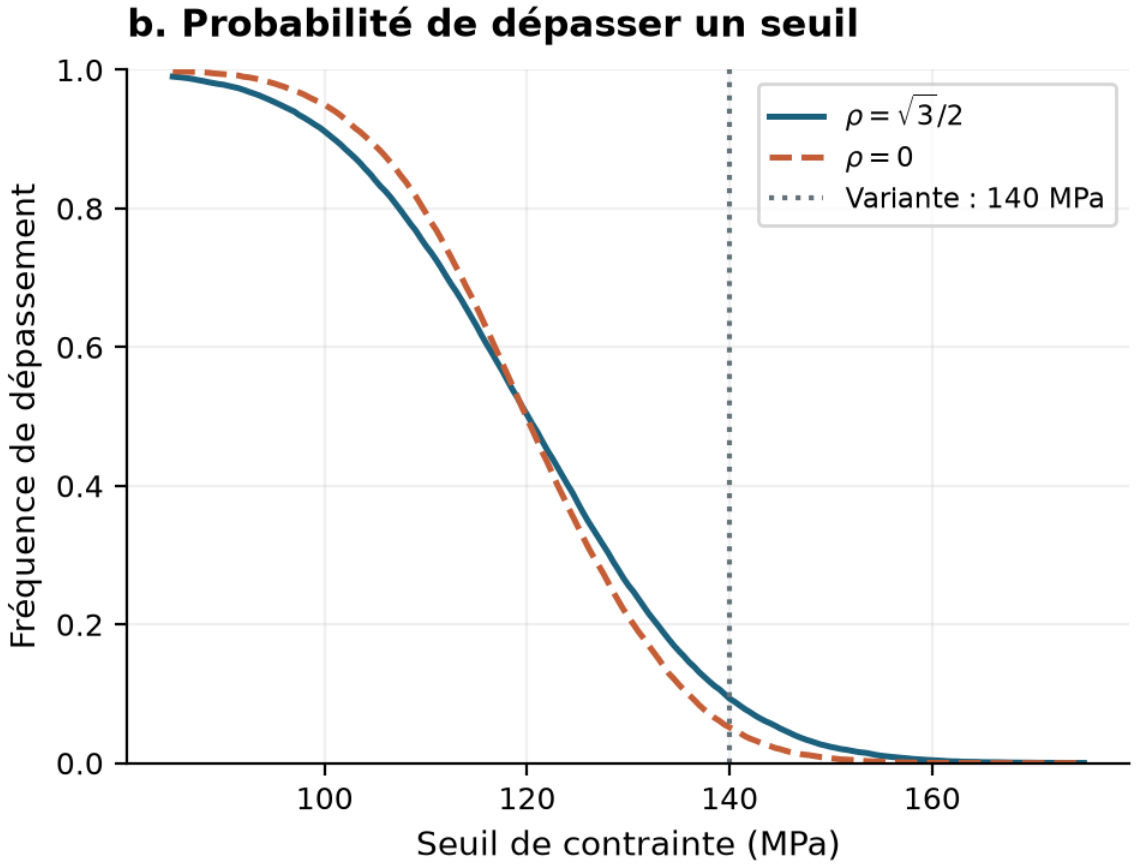
140 MPa : variante pédagogique avec dépassements observables

$$250\,\mathrm{MPa} : \quad \mathbb{P}(\text{rupture}) \simeq 4{,}12 \times 10^{-18}$$

$$140\,\mathrm{MPa} : \quad 0{,}0930 \leq \mathbb{P}(\text{rupture}) \leq 0{,}1012$$

Déformée et influence de la corrélation

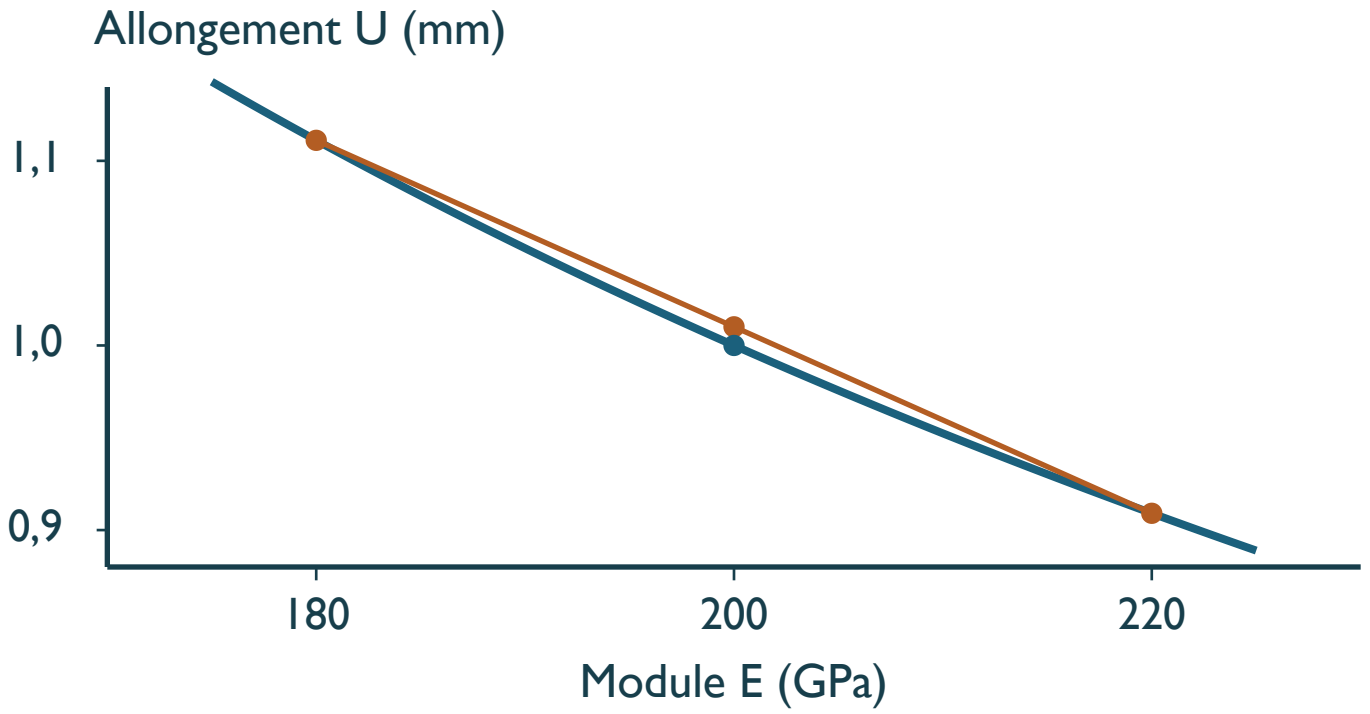




E = 200000 MPa, I = 27000 mm^4. La flèche moyenne maximale vaut environ 3,91 mm

La barre en traction : l'effet du module

Retour à la barre en traction : longueur 1 m et contrainte 200 MPa.



Deux matériaux équiprobables

E = 180 ou 220 GPa

Moyenne des réponses

E[U] ≈ 1,010 mm

Réponse au module moyen

U(E[E]) = 1,000 mm

Calculer avec le module moyen sous-estime ici l'allongement moyen d'environ 1 %.

Remarque 1.23 · Une linéarisation est une approximation

Pour une fonction non linéaire f différentiable en $\boldsymbol{m}$, la variable linéarisée $f(\boldsymbol{m}) + \nabla f(\boldsymbol{m})^\mathsf{T}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m})$ a exactement pour variance $\nabla f(\boldsymbol{m})^\mathsf{T} V \nabla f(\boldsymbol{m})$.
L'identifier à $\mathrm{Var}(f(\boldsymbol{Y}))$ est une approximation, adaptée à de faibles fluctuations et à un reste de linéarisation négligeable en moyenne quadratique.

Une raideur aléatoire peut rendre la réponse non linéaire. Le gradient fournit alors une approximation locale, dont la précision doit être contrôlée.

Réponse non linéaire · Le rôle du module

Une force plus grande allonge la barre. Un module plus grand la raidit.

Section et longueur fixes, fluctuations faibles et moyennes positives.

$$U = \frac{FL}{AE}, \qquad U_0 = \frac{\mathbb{E}[F]L}{A\mathbb{E}[E]},$$

$$\frac{\mathrm{Var}(U)}{U_0^2} \simeq c^2(F) + c^2(E) - 2\rho\, c(F)c(E),$$

$$c(X) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathbb{E}[X]}, \qquad \rho = \mathrm{Corr}(F, E).$$

Si W est fixé, la moyenne de M/W est exactement la moyenne de M divisée par W.

Bilan · La même démarche, de la barre à la poutre

Le mécanisme fixe l'état limite. La loi jointe des entrées fixe le risque.

Pour la poutre, l'équilibre nous a donné la réponse mécanique.

Chapitre 2 : apprendre cette réponse si elle est inconnue ou coûteuse.

Repères pour poursuivre

Polycopié révisé : chapitre 1

Madsen, Krenk et Lind, Methods of Structural Safety