Université de Technologie de Compiègne
Master Structures et Systèmes Mécaniques Complexes (SMC)

Modélisation stochastique en mécanique

Mokhtar Z. Alaya et Salim Bouzebda

TD 1

Fiabilité et dimensionnement des structures

Exercice 1 Méthode de la résistance-sollicitation en mécanique

Une barre de section constante est soumise à une traction axiale aléatoire. On note S la sollicitation et R la résistance, exprimées dans la même unité. Les deux variables sont positives, de fonction de répartition jointe $F_{R,S}$, de fonctions marginales F_R, F_S et, lorsqu'elle existe, de densité jointe f. Leurs moyennes sont m_R, m_S et leurs variances σ_R^2, σ_S^2. On suppose $\sigma_R, \sigma_S > 0$; l'indépendance est retenue pour les questions 4 et 5. La probabilité de rupture est $P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$ et la fiabilité $\mathcal{R} = 1 - P_f = \mathbb{P}(R > S)$.

1. Exprimer P_f à l'aide de $f(r, s)$ lorsque cette densité existe.

2. Sous indépendance, établir les deux expressions
$$P_f = \int_0^\infty F_R(s)\,\mathrm{d}F_S(s) = \int_0^\infty [1 - F_S(r^-)]\,\mathrm{d}F_R(r).$$
Préciser comment elles se simplifient pour des lois continues et ce qui change si la défaillance est définie par $R < S$. On rappelle que $F_S(r^-) = \mathbb{P}(S < r)$.

3. Centrer et réduire les variables : $U_R = (R - m_R)/\sigma_R$ et $U_S = (S - m_S)/\sigma_S$. Montrer que la frontière de rupture dans le plan (u_R, u_S) est la droite
$$\sigma_R u_R - \sigma_S u_S + (m_R - m_S) = 0.$$
Indiquer de quel côté se trouve le domaine de rupture.

4. Calculer la distance de l'origine à cette droite, notée β_2, dans ces coordonnées indépendantes standardisées :
$$\beta_2 = \frac{|m_R - m_S|}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.$$
Pourquoi peut-on supprimer la valeur absolue lorsque $m_R > m_S$? Cet indice de second moment coïncide avec l'indice de Hasofer et Lind β_{HL} dans l'approximation où R, S sont gaussiennes indépendantes : les coordonnées U_R, U_S sont alors normales standard indépendantes. Pour des lois non gaussiennes, le seul centrage-réduction ne réalise pas cette transformation.

5. Sous indépendance, supposer $Z = R - S \sim \mathcal{N}(m_Z, \sigma_Z^2)$ et $m_R \geq m_S$. Montrer que $P_f = \Phi(-\beta_2)$, où Φ est la fonction de répartition normale standard. Préciser l'indice signé à utiliser si $m_R < m_S$. Le modèle gaussien est ici une approximation autorisant des queues négatives.

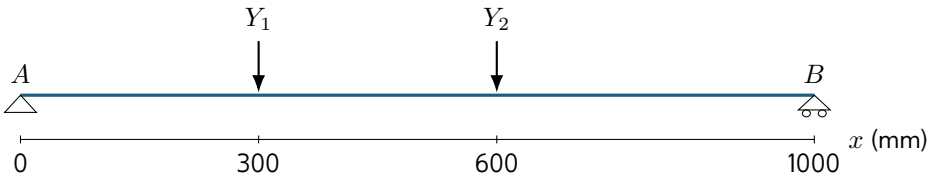
6. Les variables R, S sont maintenant dépendantes, avec la survie jointe
$$\overline{F}_{R,S}(r, s) = \mathbb{P}(R > r, S > s) = \exp[-\lambda_1 r - \lambda_2 s - \lambda_{12} \max(r, s)], \qquad r, s \geq 0,$$
où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$. Calculer la fiabilité $\mathcal{R}$. On pourra poser $R = \min(T_1, T_{12})$ et $S = \min(T_2, T_{12})$, avec des variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$. Tenir compte de l'événement $R = S$. On rappelle qu'une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ vérifie $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Exercice 2 Poutre à charge aléatoire

Une poutre horizontale AB, simplement appuyée à ses extrémités, subit deux charges ponctuelles verticales Y_1, Y_2, appliquées à $x_1 = 0{,}3\ell$ et $x_2 = 0{,}6\ell$ depuis A. Sa longueur vaut $\ell = 1000$ mm, son module de résistance $W = 1800$ mm^3 et sa contrainte admissible $\sigma_a = 250$ N/mm^2. Le vecteur des charges, en N, vérifie

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{m}, V), \qquad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix}, \qquad V = 100^2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Les charges sont comptées positivement vers le bas et les réactions d'appui vers le haut ; le moment de flexion est positif lorsqu'il met la fibre inférieure en traction.



1. Exprimer la réaction verticale R_A du support A en fonction de $\boldsymbol{Y}$.
2. Donner les moments de flexion $M_1 = M(x_1)$ et $M_2 = M(x_2)$ par rapport à l'axe perpendiculaire au plan des forces. Préciser leurs unités.
3. Calculer la décomposition de Cholesky $V = CC^{\mathsf{T}}$, où C est triangulaire inférieure. On pourra utiliser
$$c_{11} = \sqrt{v_{11}}, \qquad c_{21} = v_{21}/\sqrt{v_{11}}, \qquad c_{22} = \sqrt{v_{22} - v_{21}^2/v_{11}}.$$
4. Exprimer $\boldsymbol{Y}$ à l'aide d'un vecteur $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(0, I)$.
5. Exprimer le moment aléatoire $M(x)$ en tout point $0 \le x \le \ell$, puis les contraintes $\sigma_i = M_i/W$. Donner la loi jointe de (M_1, M_2), sa moyenne et sa covariance.
6. Exprimer la fiabilité de la poutre. On retient le critère de résistance $|\sigma_i| < \sigma_a$ aux deux sections critiques, afin de couvrir aussi les changements de signe possibles dans le modèle gaussien.
7. Estimer grossièrement cette fiabilité à partir de deux réalisations. On dispose de quatre valeurs uniformes indépendantes : $u_1 = 0{,}92$, $u_2 = 0{,}32$, $u_3 = 0{,}35$, $u_4 = 0{,}79$. Pour fixer la transformation en normales, appliquer Box–Muller à chacune des paires $(a, b) = (u_1, u_2)$ et (u_3, u_4) :
$$z_1 = \sqrt{-2\log a}\,\cos(2\pi b), \qquad z_2 = \sqrt{-2\log a}\,\sin(2\pi b).$$
Calculer les charges, les contraintes maximales et la fréquence de non-rupture. Discuter la portée d'une estimation obtenue avec seulement deux essais.

Exercice 3 Charge aléatoire

La résistance $R \sim \mathcal{U}[r_1, r_2]$ et la sollicitation $S \sim \mathcal{U}[s_1, s_2]$ sont indépendantes, avec $0 < s_1 < r_1 < s_2 < r_2$.

1. Exprimer la probabilité de défaillance $P_f = \mathbb{P}(R \le S)$ à l'aide des quatre bornes.
2. Calculer $\tau = \mathbb{E}[R/S]$, coefficient de sécurité moyen. Comparer à $\mathbb{E}[R]/\mathbb{E}[S]$.
3. Application numérique : donner P_f et τ pour $s_1 = 1$, $r_1 = 3$, $s_2 = 4$, $r_2 = 6$.

Exercice 4 Barre à résistance et sollicitation gaussiennes

Une barre est soumise à une sollicitation S et possède une résistance R, exprimées en MPa. On pose $P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$. Les paramètres de l'exemple sont rappelés ici :

$$R \sim \mathcal{N}(300, 30^2), \qquad S \sim \mathcal{N}(200, 20^2).$$

Les moyennes sont en MPa et les variances en MPa^2. Les deux variables sont d'abord indépendantes. Ce modèle gaussien est une approximation qui autorise des valeurs négatives. On note Φ la répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. Les essais des questions 3 et 4 sont indépendants et de même probabilité de rupture, avec un nombre d'essais fixé à l'avance.

1. Déterminer la loi de $R - S$, β et P_f.
2. Répéter le calcul pour une paire conjointement gaussienne de corrélation $\rho = 0{,}5$. Expliquer le sens de variation de P_f pour ces paramètres.
3. On revient au cas indépendant de la question 1. On observe 280 ruptures en $100\,000$ essais. Donner l'estimation et un intervalle normal approché à 95 %. Vérifier sa plausibilité ici.
4. Dans une nouvelle campagne, toujours dans le cas indépendant, aucun échec n'est observé sur 1000 essais : donner une borne supérieure unilatérale exacte à 95 %. Peut-on conclure $P_f < 10^{-4}$?

Exercice 5 Deux lois uniformes positives

Soient $R \sim \mathcal{U}[3,6]$ et $S \sim \mathcal{U}[1,4]$, indépendantes, exprimées dans la même unité. On retient $P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$.

1. Représenter le domaine de défaillance dans le rectangle des valeurs possibles. Calculer P_f par une aire puis par une intégrale.
2. Calculer $\tau = \mathbb{E}[R/S]$. Comparer à $\mathbb{E}[R]/\mathbb{E}[S]$.
3. Généraliser P_f au cas $s_1 < r_1 < s_2 < r_2$ sous indépendance, avec $R \sim \mathcal{U}[r_1, r_2]$ et $S \sim \mathcal{U}[s_1, s_2]$. Pour le calcul de $\mathbb{E}[R/S]$, supposer en outre $s_1 > 0$.

Exercice 6 Fiabilité générale et dépendance commune — approfondissement

La résistance R et la sollicitation S sont positives et exprimées dans la même unité. On note F_R, F_S leurs répartitions, $F_S(r^-) = \mathbb{P}(S < r)$, $P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}(R > S)$. Une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ a pour survie $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ et pour densité $\lambda e^{-\lambda t}$, pour $t \geq 0$.

1. Lorsqu'une densité jointe existe, écrire $P_f = \mathbb{P}(R \leq S)$ comme une intégrale. Sous indépendance, exprimer aussi P_f à l'aide des fonctions de répartition, avec une formule valable en présence d'atomes.
2. Considérer trois variables indépendantes T_1, T_2, T_{12} de lois exponentielles de paramètres strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$, et poser $R = \min(T_1, T_{12})$, $S = \min(T_2, T_{12})$. Vérifier que

$$\mathbb{P}(R > r, S > s) = \exp[-\lambda_1 r - \lambda_2 s - \lambda_{12} \max(r, s)], \quad r, s \geq 0.$$

   Les variables auxiliaires ont ici les mêmes unités que R et S. Pour exploiter la loi du minimum et identifier la première variable, on peut multiplier les survies et intégrer la densité de la variable considérée contre les survies des deux autres.
3. En raisonnant sur la plus petite des trois variables auxiliaires, calculer la fiabilité $\mathcal{R} = \mathbb{P}(R > S)$ et la probabilité $\mathbb{P}(R = S)$. Pourquoi une intégrale portant seulement sur une densité bidimensionnelle ne décrirait-elle pas toute cette loi ?

4. Discuter l'effet de λ_{12}, à λ_1, λ_2 fixés. Les lois marginales restent-elles inchangées ? Que faut-il vérifier avant d'interpréter ce modèle comme celui d'une résistance et d'une charge réelles ?

Exercice 7 De la charge aux moments

Une poutre AB simplement appuyée, de longueur $\ell = 1000$ mm, porte deux charges ponctuelles Y_1, Y_2 à $x_1 = 300$ mm et $x_2 = 600$ mm depuis A. Les charges sont positives vers le bas, les réactions vers le haut et le moment positif met la fibre inférieure en traction. On pose $\boldsymbol{M} = (M(300), M(600))^{\mathsf{T}}$ et $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$. Le module de résistance est $W = 1800$ mm^3 et le seuil $\sigma_a = 250$ MPa. La rupture se produit si $\max_x |M(x)|/W \geq \sigma_a$. Les charges sont gaussiennes, de moyenne et covariance

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix} \text{ N}, \qquad V = 10^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ N}^2.$$

La factorisation à vérifier est $C = \left(\begin{smallmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)$, en N, avec $V = CC^{\mathsf{T}}$. Le moment est affine entre les charges ponctuelles et nul aux appuis.

1. Retrouver les réactions puis la matrice A reliant les charges aux moments.
2. Vérifier la décomposition de Cholesky et calculer la corrélation des charges.
3. Calculer la moyenne et la covariance des moments. Donner les unités.
4. Écrire un algorithme pour simuler N profils et estimer P_f.

Exercice 8 Rupture rare et estimation

La poutre simplement appuyée a une longueur de 1000 mm et deux forces verticales aux abscisses 300 et 600 mm. Son module de résistance vaut $W = 1800$ mm^3. Avec les forces en N et les moments en N mm,

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix}, 10^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}, \quad A = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{pmatrix} \text{ mm}.$$

Les moments sont nuls aux appuis et affines sur les trois tronçons. La rupture globale est $F_1 \cup F_2$, où $F_i = \{|M_i| \geq W\sigma_a\}$. On pourra utiliser les bornes d'union

$$\max\{\mathbb{P}(F_1), \mathbb{P}(F_2)\} \leq P_f \leq \min\{1, \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2)\}.$$

Le scénario « sans corrélation » conserve les deux lois marginales gaussiennes des charges, mais remplace leurs covariances croisées par zéro.

1. Utiliser les lois marginales des moments pour appliquer ces bornes aux seuils de 250 puis 140 MPa.
2. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'essais nécessaire pour observer une défaillance à 250 MPa en moyenne ?
3. Expliquer pourquoi modifier la corrélation en conservant les marginales des charges peut modifier les marginales des moments.
4. Comparer les cas corrélés et indépendants à 140 MPa, avec un intervalle de confiance normal approché pour chaque estimation. Utiliser les résultats suivants : sur $N = 20000$ tirages indépendants par scénario, on compte 1859 dépassements avec corrélation et 1029 sans corrélation.

Exercice 9 Deux réalisations ne suffisent pas à conclure

Une poutre simplement appuyée, longue de 1000 mm, porte deux forces verticales aux abscisses 300 et 600 mm. Pour cette poutre,

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix} \text{ N}, \quad C = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ N}, \quad \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(0, I).$$

Le moment est nul aux appuis et affine entre charges. Avec Y_i en N, les moments aux deux charges sont $M_1 = 210Y_1 + 120Y_2$ et $M_2 = 120Y_1 + 240Y_2$, en N mm. Le module de résistance est $W = 1800$ mm^3 ; la contrainte maximale en valeur absolue vaut $\sigma_{\max} = \max(|M_1|, |M_2|)/W$, en MPa. On donne quatre valeurs uniformes indépendantes $u_1 = 0{,}92$, $u_2 = 0{,}32$, $u_3 = 0{,}35$ et $u_4 = 0{,}79$. Pour chaque paire $(a, b) = (u_1, u_2)$ puis (u_3, u_4), utiliser Box–Muller :

$$z_1 = \sqrt{-2\log a}\,\cos(2\pi b), \qquad z_2 = \sqrt{-2\log a}\,\sin(2\pi b).$$

1. Calculer les deux vecteurs de charges $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{z}$, puis les contraintes maximales avec la formule de la poutre.
2. Estimer la fiabilité au seuil de 250 MPa à partir de ces deux réalisations.
3. Interpréter le résultat : permet-il de valider un dimensionnement ? Si aucune défaillance n'est observée en deux essais indépendants, donner la borne binomiale supérieure unilatérale à 95 % sur P_f.

Cet exercice se traite à la calculatrice ou avec les résultats fournis par l'enseignant, pendant le TD ou en travail autonome.