Université de Technologie de Compiègne
Master Structures et Systèmes Mécaniques Complexes (SMC)

Modélisation stochastique en mécanique

Mokhtar Z. Alaya et Salim Bouzebda

TD 2

Apprentissage statistique pour la mécanique

Exercice 1 Identifier les coefficients mécaniques

Les variables Y_1, Y_2 désignent deux charges, en N, et M_1 un moment fléchissant, en N mm. On cherche un modèle affine

$$M_1 \simeq \theta_0 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2.$$

On dispose des mesures sans bruit suivantes :

Y_1 (N)	Y_2 (N)	M_1 (N mm)
100	0	21000
0	100	12000
100	100	33000
200	100	54000

1. Construire la matrice D et identifier $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$.
2. Que devient l'identification si toutes les expériences vérifient $Y_2 = 2Y_1$?
3. Un capteur ajoute un biais constant de 1000 N mm à toutes les réponses. Quels coefficients changent si l'intercept est conservé ?

Exercice 2 Ridge et filtrage discret

Questions 1–2 : régularisation et validation. Question 3 : identification par filtrage discret d'une réponse mécanique à partir d'une entrée retardée. Pour les questions 1–2, $D \in \mathbb{R}^{n\times(d+1)}$ contient une première colonne de 1, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ les réponses et $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_d)^\mathsf{T}$ les coefficients. On considère, pour $\lambda \geq 0$, le critère

$$J_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \|\boldsymbol{y} - D\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \boldsymbol{\theta}^\mathsf{T} P \boldsymbol{\theta}.$$

1. En posant $P = \mathrm{diag}(0, 1, \ldots, 1)$, dériver les équations normales de la régression ridge. Justifier le zéro dans P.
2. Expliquer le risque de standardiser les données avant de séparer entraînement et test ; proposer une procédure correcte avec validation croisée.
3. Pour $N \geq p \geq 1$, on dispose de $x_0, \ldots, x_{N-1}$ et de $y_{p-1}, \ldots, y_{N-1}$. Dans le modèle $y_n = \sum_{j=0}^{p-1} h_j x_{n-j} + \varepsilon_n$, écrire la matrice de régression des p coefficients $(h_0, \ldots, h_{p-1})$ et le vecteur des réponses. La première ligne de cette matrice est $(x_{p-1}, \ldots, x_0)$. Formuler l'orthogonalité du vecteur des résidus aux colonnes d'entrées retardées au minimum des moindres carrés.

Exercice 3 Un processus gaussien à une observation

Sur une entrée adimensionnée, on modélise une réponse normalisée par un processus gaussien f de moyenne $m = 0$ et de noyau de covariance

$$k(x, x') = \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2}\right).$$

On observe sans bruit $f(0) = 2$.

1. Déterminer la moyenne et la variance conditionnelles de $f(x)$.
2. Donner ces valeurs en $x = 0$ puis leur limite lorsque $|x| \to \infty$.
3. On observe maintenant $y(0) = f(0) + \varepsilon_0 = 2$ et l'on envisage une nouvelle mesure $y_{\text{nouv}}(x) = f(x) + \varepsilon_{\text{nouv}}$. Les deux erreurs sont gaussiennes centrées, de même variance η^2, indépendantes entre elles et indépendantes du processus gaussien. Reprendre le calcul en distinguant la prédiction de $f(x)$ et celle de $y_{\text{nouv}}(x)$.

Exercice 4 Modèle appris et événement de rupture

Une poutre simplement appuyée de longueur $L = 1000$ mm porte deux forces verticales Y_1, Y_2 en N, appliquées à 300 et 600 mm de l'appui gauche. Son module de résistance est $W = 1800$ mm^3. Les moments aux deux sections chargées, en N mm, sont

$$M_1 = 210Y_1 + 120Y_2, \qquad M_2 = 120Y_1 + 240Y_2.$$

La contrainte critique exacte est $\sigma(\boldsymbol{Y}) = \max(|M_1|, |M_2|)/W$, en MPa. Une rupture est déclarée lorsque $\sigma \geq 140$ MPa. Pour la question 2, le domaine d'apprentissage est le rectangle $[300, 1300] \times [100, 900]$ en N^2. Pour la question 3, on prend la population physique de charges

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{m}, V), \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix} \text{ N}, \quad V = 10^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ N}^2.$$

Ce modèle gaussien n'est pas tronqué : les valeurs absolues de la réponse exacte sont conservées pour toutes ses réalisations. Les questions 2–3 demandent un protocole sur papier et des indicateurs ; l'ajustement numérique d'un GP n'est pas demandé.

1. Pour des charges positives Y_1, Y_2, retrouver la droite de changement de section critique de la poutre.
2. Décrire une expérience avec 120 points d'apprentissage, une validation interne et un test indépendant de 400 points. Quels résultats et indicateurs présenter pour juger la précision de la prédiction et sa pertinence mécanique ?
3. Expliquer comment comparer, sur une même population physique de charges, la classification de rupture du modèle exact et celle de la moyenne du GP à 140 MPa. Quelles catégories d'accord et de désaccord examiner, et lesquelles ont les conséquences mécaniques les plus défavorables ?
4. Montrer que l'écart entre deux probabilités de rupture est majoré par la probabilité de désaccord des indicatrices correspondantes. *Indication :* noter I et J les deux indicatrices et examiner les valeurs de $|I - J|$.

Exercice 5 Identifier une raideur et quantifier sa précision

Un élément élastique est modélisé, dans son domaine linéaire, par $F = ku$, où u est le déplacement en mm et k une raideur inconnue en N/mm. Le zéro du capteur est étalonné : on ajuste un modèle sans intercept. Les déplacements imposés sont connus exactement et les forces mesurées suivent

$$F_i = ku_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_F^2), \qquad \sigma_F = 2 \text{ N}.$$

Cette variance est connue par un étalonnage indépendant. On mesure

$$(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3) \text{ mm}, \qquad (F_1, F_2, F_3) = (11, 19, 31) \text{ N}.$$

1. En minimisant $\sum_{i=1}^{3}(F_i - ku_i)^2$, déterminer l'estimateur $\widehat{k}$ et sa valeur numérique. Vérifier l'unité du résultat.

2. Montrer que $\widehat{k}$ est gaussien sans biais, calculer sa variance et construire un intervalle de confiance à 95 % pour k. On prendra 1,96 comme quantile normal. Préciser le sens de cet intervalle.

3. À $u_\star = 4$ mm, calculer la force moyenne estimée, un intervalle de confiance à 95 % pour la force moyenne $ku_\star$, puis un intervalle de prédiction à 95 % pour une nouvelle mesure de force, de bruit indépendant de même variance. Expliquer pourquoi les deux largeurs diffèrent.

4. Un seul essai supplémentaire est possible, à $u = 1$ mm ou à $u = 4$ mm, avec le même bruit. Comparer la variance de l'estimateur de raideur après ajout de cet essai, sans connaître sa réponse. Quel choix améliore le plus la précision ? Donner les limites mécaniques de cette recommandation.

Exercice 6 Choisir un essai près du seuil de rupture

Deux chargements fixés, notés A et B, sollicitent une même structure. Après les essais déjà disponibles, un processus gaussien décrit l'incertitude sur leurs contraintes critiques latentes S_A, S_B, en MPa :

$$\begin{pmatrix} S_A \\ S_B \end{pmatrix} \mid \mathcal{D} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 138 \\ 130 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 100 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice de covariance est en MPa^2 ; les hyperparamètres sont fixés. Un nouvel essai au point $C \in \{A, B\}$ donne $Z_C = S_C + \varepsilon$, avec un bruit ε gaussien centré, d'écart-type 2 MPa (variance 4 MPa^2), indépendant du processus et des mesures antérieures. Le seuil admissible est 140 MPa. On note m_C, s_C la moyenne et l'écart-type latents actuels ; Φ est la fonction de répartition normale centrée réduite.

1. Calculer les probabilités conditionnelles de dépassement du seuil en A et B. Pour renseigner en priorité la décision la plus ambiguë, on compare les distances au seuil $U_C = |m_C - 140|/s_C$ et retient la plus petite. Quel point cette comparaison privilégie-t-elle ?

2. Comparer un autre objectif : réduire au maximum la somme des deux variances latentes. Par conditionnement gaussien, calculer cette somme après un essai en A, puis après un essai en B, avant de connaître la valeur mesurée. Quel point serait alors retenu ? Expliquer la différence.

3. L'essai est finalement réalisé en A et donne $Z_A = 142$ MPa. Calculer la moyenne et la matrice de covariance conditionnelles de (S_A, S_B), puis les probabilités de dépassement actualisées. Quelle variance prévoir pour une nouvelle mesure indépendante en A ?

4. Ces probabilités ponctuelles peuvent-elles être interprétées comme la probabilité de rupture en exploitation sous des charges aléatoires ? Préciser quelles informations supplémentaires seraient nécessaires.

Pour les calculs : $\Phi(0{,}5) \simeq 0{,}6915$, $\Phi(1) \simeq 0{,}8413$ et $\Phi(0{,}6708) \simeq 0{,}7488$; $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.