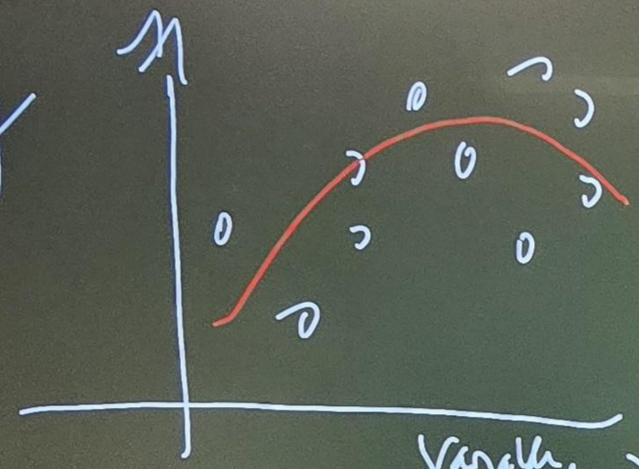
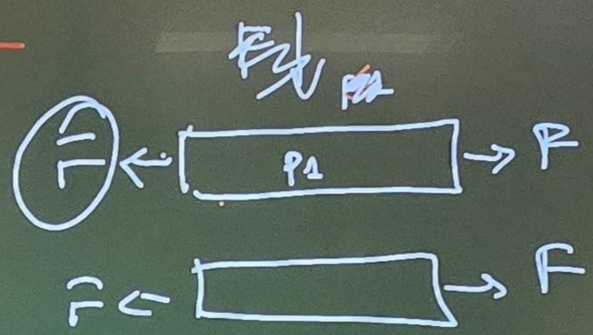
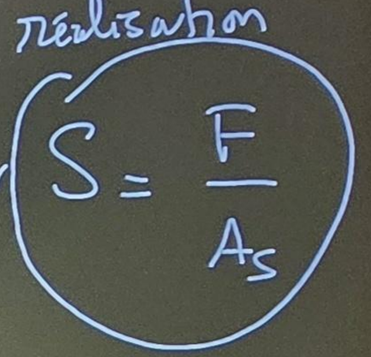
P1 SMC2

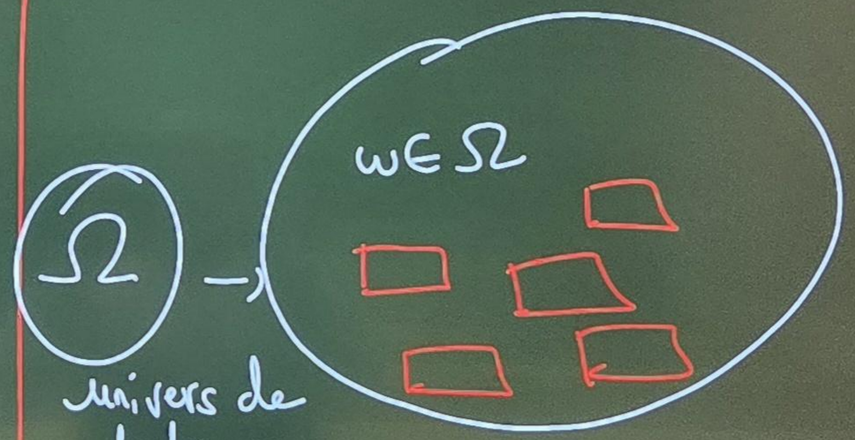


$y = f(x)$

Approfondissement







Univers de toutes mes réalisations

↳ tirage

↳ épreuve

$S(\omega) = \frac{F}{A_S(\omega)}$

Réalisation

Menu Quitter Partager Liste
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 1/13 Nombre de pages Suivant
Speechi

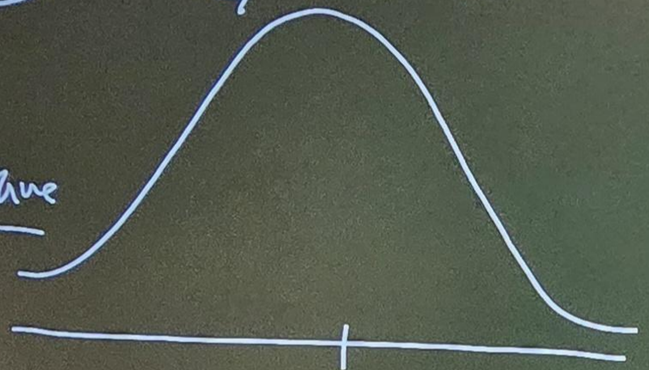
p2

modèle :

Résistance

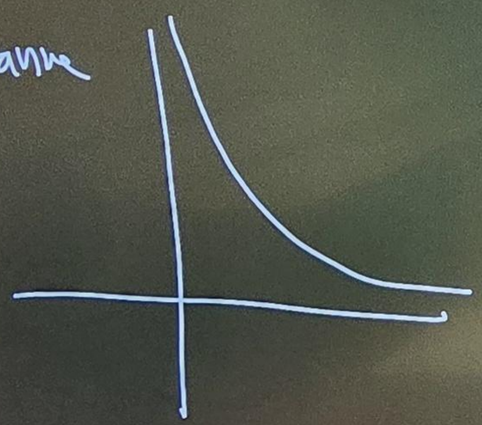
sollicitation

Résistance

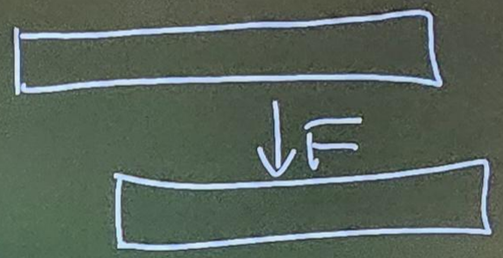


258 MPa

taux de panne



① structure inacceptable ← fissure



dilatation

② Charges ↓F $\underline{E}(\omega)$ réalisation : Variation de charges.

Résistance $R(\omega)$ aléatoire.

décrire Charge et Résistance

modèle probabiliste

③ Calculer un risque et choisir une section A_s

décision

Menu Quitter Partager Liste
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 2/13 Nombre de pages Suivant
Speechi
ECRAN

P3 R (MPa) $\}$ m̂ unité.
S (MPa)

$g = R - S$

$(R > S)$

$\{ g > 0$: ~~[illegible]~~ structure utilisable

$\underbrace{g \leq 0 \quad (R \leq S)}_{\text{rupture défaillance.}}$

avec une proba

$S = 200\,MPa$, $R \sim \mathcal{N}(250, 25^2)$

$g = R - S$

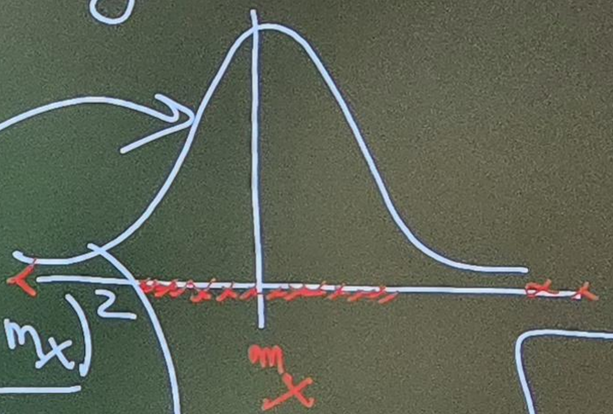
défaillance $g \leq 0$; $g = \mathcal{N}(200, 25^2)$

Loi Normale : $X \sim \mathcal{N}(\underbrace{m_X}_{\text{moy}}, \underbrace{\sigma_X^2}_{\text{exact type}})$ dispersion

$\mathbb{E}[X] = m_X$

$\mathbb{V}ar[X] = \sigma_X^2$

fonction de densité



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

Fonction de répartition

$$\Phi(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

sans unité

$R \sim \mathcal{N}(250, 25^2)$ MPa MPa

$\Phi_K(r) = \mathbb{P}[R \leq r]$

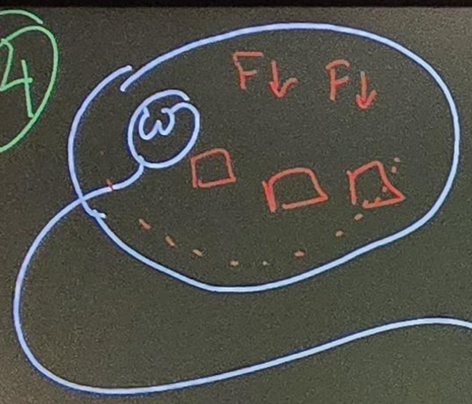
$= \int_{-\infty}^{r} \boxed{f(u)}\, du$ MPa^{-1} MPa

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 3/13 Nombre de pages Suivant

P4



Ω univers

population

toutes les réalisation

une réalisation

$$X(\omega) = \{R(\omega), S(\omega), \dots\}$$

$$\frac{F(\omega)}{A(\omega)}$$

modèle mécanique stable

$$\{g(X) \leq 0\}^{F(\omega)}$$

subit des variations aléatoires

$\equiv$ défaillance

$$\{\omega : g(X(\omega)) \leq 0\}$$

événement de défaillance

$$\{\omega : g(X(\omega)) > 0\}$$

de fonctionnement

$$g(\omega) = g(X(\omega)) = R(\omega) - S(\omega)$$

$$\{g = R - S\}$$ variable aléatoire.

$$\Omega = \{g > 0\} \cup \{g \leq 0\}$$

risque

$$\boxed{\text{Proba de défaillance}}$$

$$P_f = \mathbb{P}[g \leq 0]$$

$$R = 1 - P_f \in [0,1].$$

fiabilité

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 4/13 Nombre de pages Suivant

• R et S sont indépendantes (P5)
si connaître la sollicitation ne change pas la loi de probabilité de R

Autrement

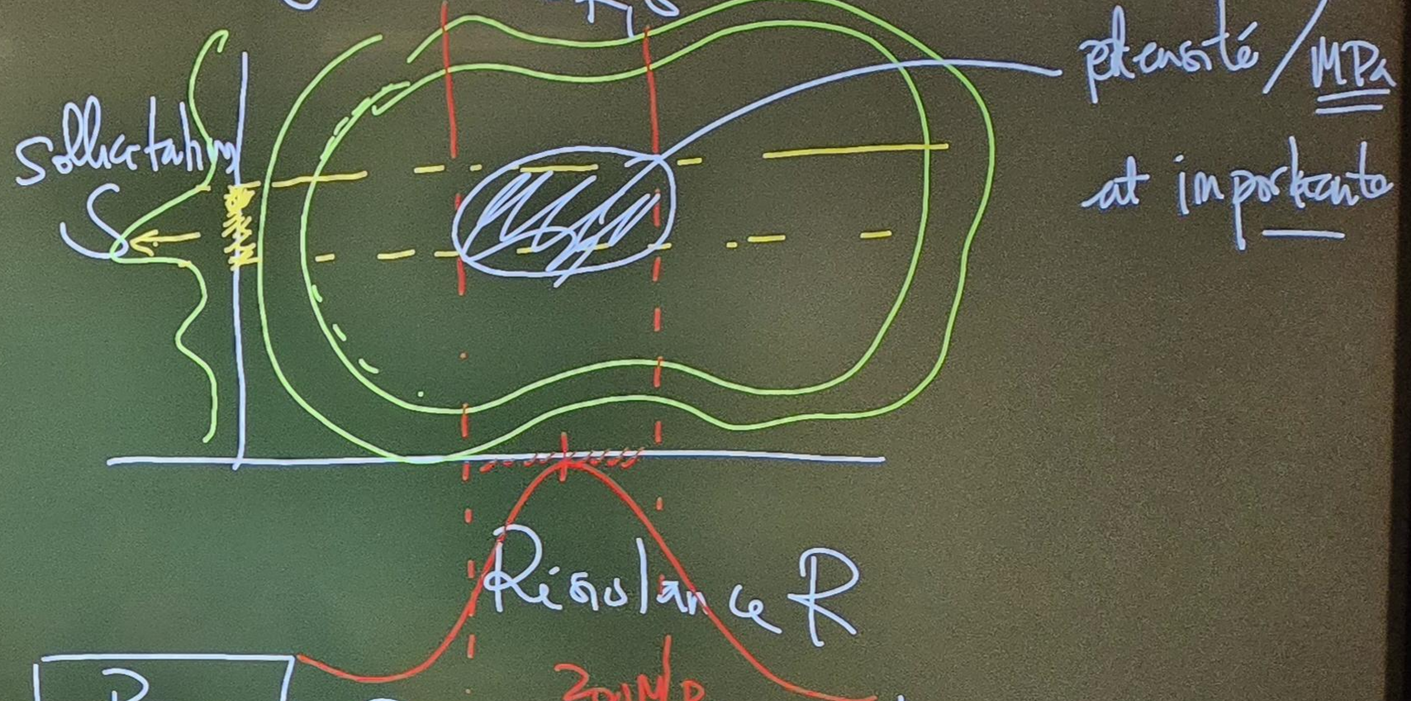
Observer une forte sollicitation ne rend pas une résistance élevée ou faible plus probable qu'elle ne l'était auparavant.

$$P_f = \mathbb{P}(g \le 0) = \mathbb{P}(R \le S) = \iint_{r \le s} f_{R,S}(r,s)\,dr\,ds$$

Moyenne sur $S \in [s, s+ds]$

Sollicitation

densité conjointe $f_{R,S}(r,s) \in \mathbb{R}^2$

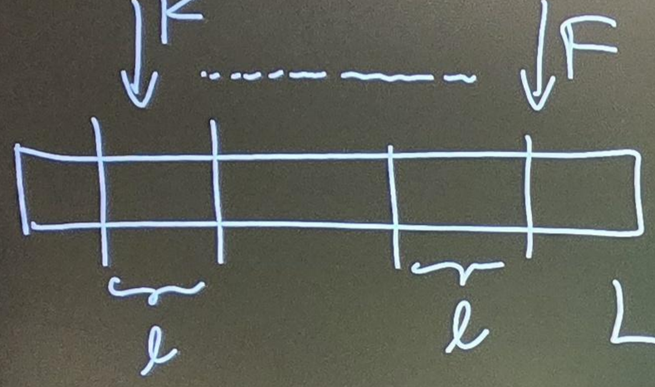


Prop:

R et S sont indépendantes

$$f_{R,S}(r,s) = f_R(r)\,f_S(s)$$

Menu Quitter Partager Liste
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 5/13 Nombre de pages Suivant



φ6

$X = e^Z$, $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

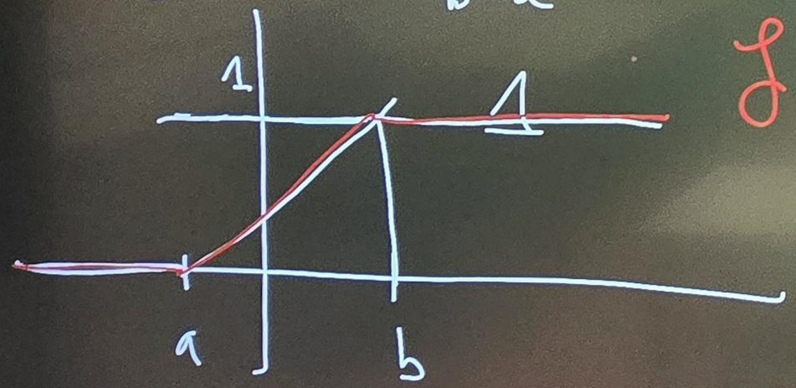
lognormale

$\mathbb{E}[X] = \int e^z f_Z(z)\,dz$

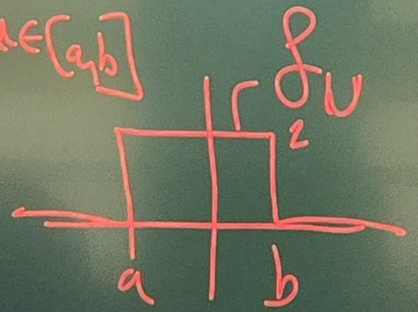
$$\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) f_X(x)\,dx$$

$U \in \mathcal{U}([a,b])$?

$$F_U(u) = \frac{u-a}{b-a} \quad a \le u \le b$$



$$f_U(u) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{u \in [a,b]}$$



$$= \int_{-a}^{+\infty} e^z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dz$$

$$= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

Menu | Quitter | Partager | Liste

Sélectionner | Stylo | Gomme | Tout effacer | Règle | Forme | Tableau | Note | Aperçu | Annuler | Refaire

Ajouter | Précédent | 6/13 Nombre de pages | Suivant

P7

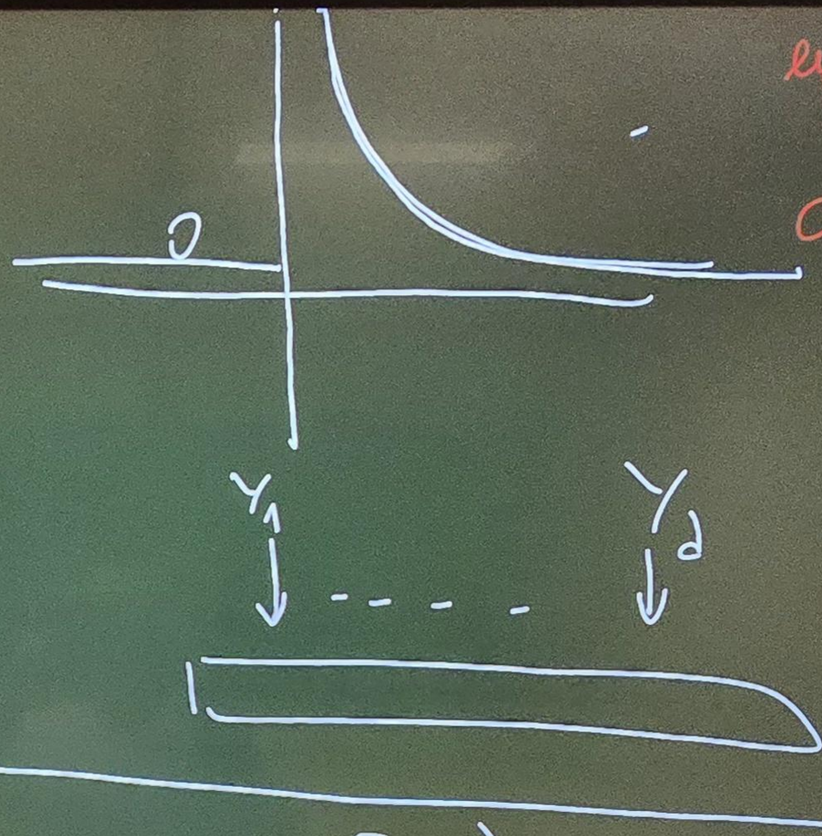
$$\mathbb{P}(T > s+t \mid T > s) = \mathbb{P}(T > t)$$

$$\mathbb{P}(T > 500h + 100h \mid T > 500h) = \mathbb{P}(T > 100h)$$

$$T \sim \cancel{\mathrm{Exp}}\ \mathrm{Exp}(\lambda)$$

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{h}\right)$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t \geq 0}$$



$$m = \mathbb{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_d) \end{pmatrix}$$

exp de $\in \mathbb{R}^d$

covar $\mathbb{R}^{d \times d}$

$\in \mathbb{R}^d$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix}$$

$\sim \mathcal{N}$ gaussien

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[(Y - m)(Y - m)^T\right]$$

Ex TD1: Ex 4 (p8)

$R \sim \mathcal{N}(300, 30^2)$, $S \sim \mathcal{N}(200, 20^2)$

A: $R \perp\!\!\!\perp S$ (R indep de S)

$\Phi(z) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$

1) loi de $g = R - S$; $\beta = ?$ P_f

$m_R = \mathbb{E}[R] = 300\ MPa$

$\sigma_R^2 = \mathrm{Var}[R] = 30^2\ MPa^2$

$m_S = 200\ MPa$; $\mathrm{Var}(S) = 20^2\ MPa$

R indépendant de S } $\Rightarrow$ g suit une loi normale

(slide 25) $g \sim \mathcal{N}(m_R - m_S, s_g^2)$

avec $s_g^2 = \underbrace{s_R^2}_{\mathrm{Var}(R)} + \underbrace{s_S^2}_{\mathrm{Var}(S)} - 2\rho_{RS} s_R s_S$ (Cov(R,S) = 0)

$s_g^2 = 30^2 + 20^2 = 1300\ MPa^2$

$\Rightarrow g \sim \mathcal{N}(100\ MPa ; 1300\ MPa)$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 8/13 Nombre de pages Suivant

β = indice de fiabilité

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{S_R^2 + S_S^2 - 2\rho S_R S_S}}$$

$\rho = Cov(R,S) = 0$ ($R \perp S$)

$$\beta = \frac{100}{\sqrt{30^2 + 20^2}} = \frac{100}{36,055} = 2,77350$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = \int_{-\infty}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{-2,77350} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$g \sim \mathcal{N}(100, 1300)$

$$P_f = \mathbb{P}(g \leq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{g - 100}{\sqrt{1300}} \leq \frac{-100}{\sqrt{1300}}\right)$$

$-\beta$

centrée réduite $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$R \perp\!\!\!\perp X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 9/13 Nombre de pages

p10

$P_f \simeq 0{,}00277283$

$\rho = \dfrac{Cov(R,S)}{S_R S_S}$

$\boxed{P_f \text{ est environ } 0{,}2773\,\%}$

2) $\rho_{R,S} = 0{,}5$

$Cov(R,S) = \rho \cdot S_R \cdot S_S$

$= (0{,}5)\cdot(30)\cdot(20)$

$= 300\ MPa^2$

$Var(g) = S_R^2 + S_S^2 - 2\rho S_R S_S$

$= 30^2 + 20^2 - \underbrace{2(0{,}5)30\cdot 20}_{300\cdot MPa^2}$

$Var(G) = 700\ MPa^2$

$\beta = \dfrac{100\,(m_R - m_S)}{\sqrt{S_R^2 + S_S^2 - 2\rho S_R S_S}}$

$= 3{,}77964$

$P_f = \Phi(-\beta) = \boxed{7{,}85261 \times 10^{-5}}$

Rq $\rho > 0$

$R\nearrow, S\nearrow$

$\rho = 0$; $Var(g) = 1300\ MPa^2$

$\rho = 0{,}5$; $Var(g) = 700\ MPa^2$

$Var(g) \searrow$ en présence de $Cov(R,S)$

$P_f \searrow$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 10/13 Nombre de pages

p14

3) $\boxed{280 \text{ ruptures}}$ en 100K essais.

(slide 31) : $(R_i, S_j)_{1 \leq j \leq N}$

$N = 100K$

$$I_j = \mathbb{1}\{g_j \leq 0\}$$

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}\{g_j \leq 0\}$$

$$= \frac{280}{100\,000} = 0{,}0028$$

$0{,}0001671$

$\boxed{p = \text{inconnue :}}$

$$\mathbb{E}\left[I_j = \mathbb{1}_{\{g_j \leq 0\}}\right] = p$$

$$Var(I_j) = p(1-p)$$

estimateurs

$$\hat{p} = \hat{P}_f = 0{,}0028$$

$$\boxed{Var(\hat{P}_f) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$$

(slide 32)

$$= \widehat{S_E}(\hat{p}_f) = \sqrt{\frac{0{,}0028\,(0{,}9972)}{100\,000}}$$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter 11/13

P12 avec 95% (slide 33)

$$p \in \left[\hat{p} - 1{,}96\,\hat{se}(\hat{p})\,;\ \hat{p} + 1{,}96\,\hat{se}(\hat{p})\right]$$

$$p \in [0{,}002472\,;\ 0{,}003127]$$

$\boxed{I}$ $p = P_f = 0{,}00277283$) vraie valeur / valeur analytique)

Échantillon de taille $N = 100\,000$

on a observé que 280 ruptures

99720 essais (en mode fonctionnement)

valeur analytique $\in$ Intervalle de confiance.

$\boxed{P_f < 10^{-4}}$

4) 1000 essais pas de rupture.

slide (34) : borne binomiale après zéro défaillance)

$K \sim \text{Bin}(1000, p)$

Binomial. n ; proba de défaillance)

$$\mathbb{P}(K=0) = (1-p)^{1000}$$

Essai $K=1$: proba "p" défaillant

$K=0$: proba $(1-p)$ "rupture"