P1 matrice variance-covariance.

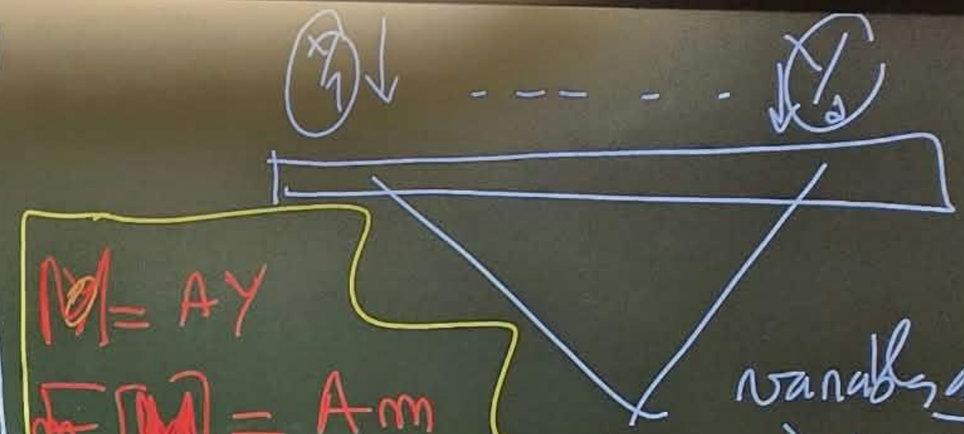
$$V = \Sigma_{\underset{\sim}{Y}} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} Var(Y_1) & & & \\ & \ddots & & Cov(Y_i, Y_j) \\ & & \ddots & \\ & & & Var(Y_d) \end{pmatrix}}_{d} \Big\} d$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Σ_Y symétrique, $\Sigma_Y^T = \Sigma_Y$

$$Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Y_j, Y_i)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_d \end{bmatrix} = AY \; ;$$



$Y_1 \downarrow \; - - - - - \; \downarrow Y_d$

$$\boxed{\begin{array}{l} M = AY \\ E[M] = Am \\ V_M = AVA^T \end{array}}$$

variables aléatoires.

$\underbrace{Y_i(\omega)}$

à chaque essai (ω) ; $\begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ \vdots \\ Y_d(\omega) \end{pmatrix}$

réalisation

(aléa)

$$m = E[Y] = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \text{ où } m_i = E(Y_i)$$

Menu Quitter Partager Liste Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire Ajouter Précédent 1/15 Nombre de pages Suivant

Rés $Y \sim \mathcal{N}_d(m, V)$ (p2)

$\Rightarrow M \sim \mathcal{N}_d(Am, AVA^T)$

transformation géométrique des charges.

Idée : identifier une réponse mécanique

$$\begin{pmatrix} \text{essai 1} \\ \text{"mesure 1"} \\ \vdots \\ \text{essai } N \\ \text{"mesure } N\text{"} \end{pmatrix}_{\text{"}N\text{"}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\text{observations}} = \begin{pmatrix} f(x_i) + \varepsilon_i \end{pmatrix}_{1 \le i \le n}$$

x_i : vecteur d'entrée

ε_i : erreur de mesure

Chap 2 : Apprentissage statistique pour la mécanique

"Machine learning"

Régression linéaire

Régression linéaire + pénalisation.

Processus gaussiens → chaîne transition.

Pont : Identifier f

Q : Quelle est la forme de f ?

$f(x) = \theta^T x$ ← réponse linéaire

= Réalité mécanique / physique

$\theta = ?$

(03) Y_1, Y_2

Réponse mécanique

$M_1 = \theta_0 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 + \varepsilon$

inconnus

linéaire

$\hat{M}_{1,*} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 Y_{1,*} + \hat{\theta}_2 Y_{2,*}$

non linéaire

$f(x) = e^{\theta^T x}$

• Données d'apprentissage

$\{M_1^i, Y_1^{i}, Y_2^{i}\}_{1 \le i \le N}$

• prédire ("terme machine learning")

• estimer ("terme statistique")

→ en utilisant les N essais

$\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$

Inférence

$Y_{1,*}, Y_{2,*}$: nouvelles mesures

Rq

$M = f(x) + \varepsilon$

modèle mécanique / physique

x : vecteur de p variables (stat)

$x = (x_1, \dots, x_p)$

paramètres (méca)

"features" (ML)

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 3/15 Nombre de pages Suivant

~~si f n'est pas com~~

P4

* Pas d'info. mécanique sur f.

$\Longrightarrow$ Apprentissage profond ("Deep learning")

$M^1 \to x^1 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_p^1 \end{bmatrix}$ W $x^{(1)}$ $= \sum Wx + b$

non linéaire

$M^n \to x^n \begin{bmatrix} x_1^n \\ \vdots \\ x_p^n \end{bmatrix}$

noeud

d

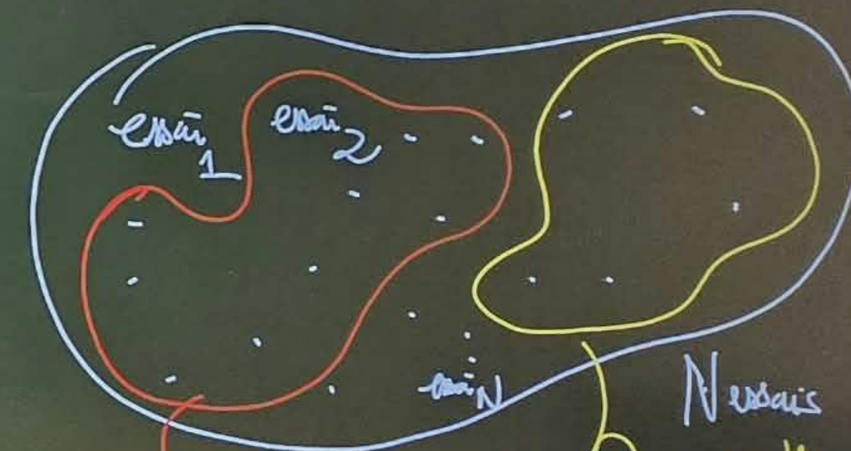
1ère couche cachée

Apprentissage profond

$\cdot\ \mathcal{D}_N = \{(y_i, x_i)\}$ $1 \le i \le N$

sortie entrée

Principe ~~en~~ de prédiction :



$N = 1000$

800

$\mathcal{D}_{test}$: ensemble tester le modèle

évaluer $\hat{f}$

$\mathcal{D}_{train}$: ensemble d'apprentissage (calculer $\hat{f}$)

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 4/15 Nombre de pages Suivant

Y : réponse numérique

X : paramètres.

$$m(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$$

$x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,d})$
géométrique.

$= (0{,}1, \dots, 0{,}05) \in \mathbb{R}^d$

$m($ $) = \mathbb{E}[Y \mid X = (0{,}1, \dots, 0{,}05)]$

p5

$x_i \in \mathbb{R}^d$

$= (x_{i,1}, \dots, x_{i,d})$

Rem : $m(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$

$= \underset{g(x)}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[(Y - g(x))^2 \mid X = x]$

distance entre Y et $g(x)$

Modèle linéaire

$$\hat{f}(x_i) = \hat{\theta}_0 + \sum_{j=1}^{d} \hat{\theta}_j x_{i,j}$$

$x_i \in \mathbb{R}^d$

$D \in \mathbb{R}^{N \times (d+1)}$

$\hat{f}(x) =$

$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N,1} & \cdots & x_{N,d} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_d \end{pmatrix}$

Menu Quitter Partager Liste

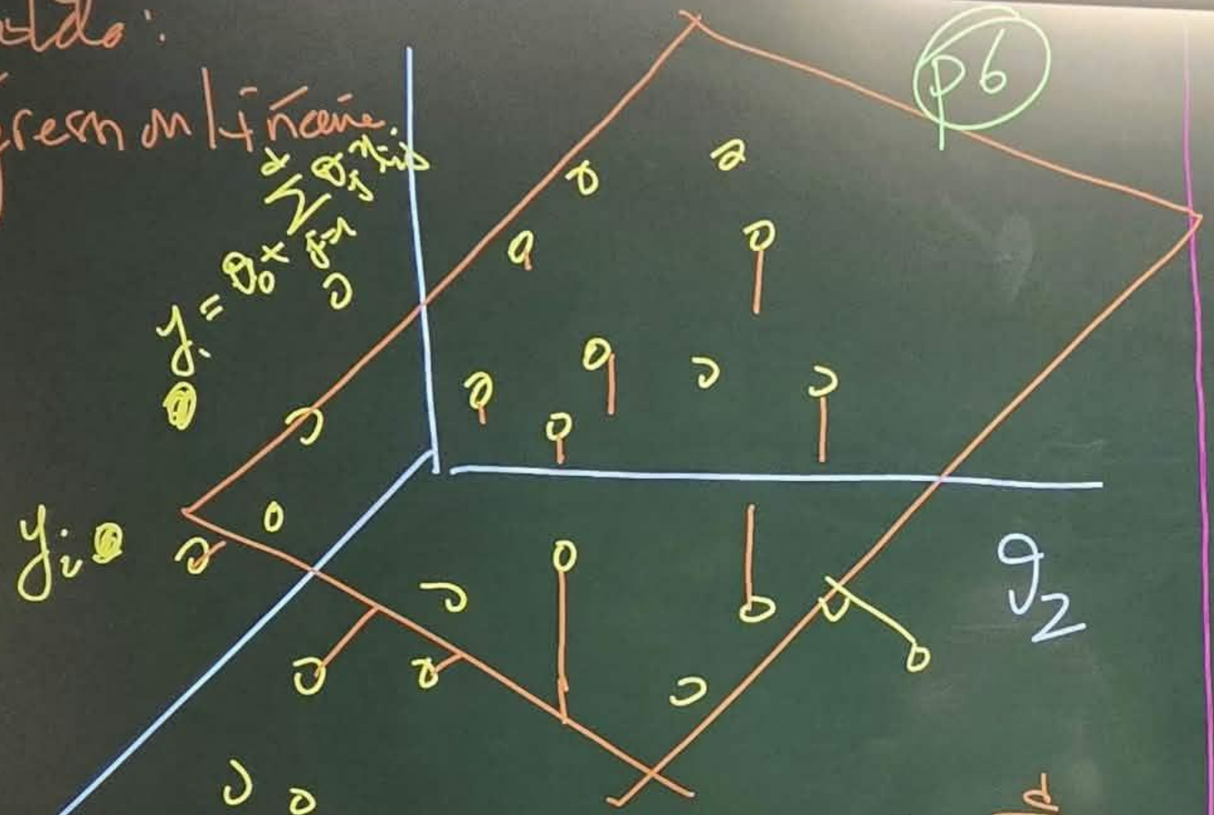
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 5/15 Nombre de pages Suivant

Modèle :

Régression linéaire

p6



$$f(x) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{d} \theta_j x_j$$

$$J(\theta) = \|y - D\theta\|_2^2$$

$\|\varepsilon\|^2$ ← norme des erreurs

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^{d+1}}{\operatorname{argmin}}\ J(\theta)$$

$$\nabla J(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$$= D^T(D\theta - y)$$

Si Det de rang plein (D^TD inversible)

$$\hat{\theta} = (D^TD)^{-1} D^T y$$

Menu Quitter Partager Liste
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 6/15 Nombre de pages Suivant

p7 Décalage de distribution "Shift Covariate"

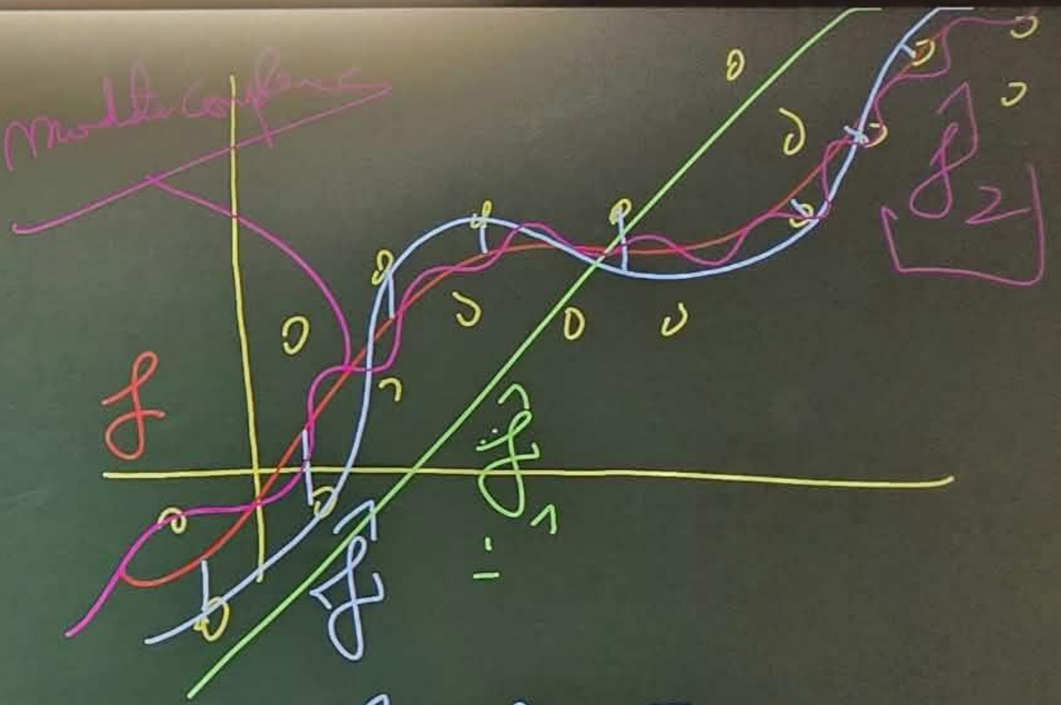
ML classique.

$\hat{f}$ $\mathcal{D}_{train}$; $\hat{f}$ évaluation sur $\mathcal{D}_{test}$

loi $\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}_{train}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_{test})$

$\mathcal{L}(\mathcal{D}_{train}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{D}_{test})$

("adaptation de domaine")



$$\mathbb{E}\left[\left(y-\hat{f}(x)\right)^2 \mid D\right] = \delta_\varepsilon^2 + b^2 + \mathrm{Var}\left(\hat{f}(x) \mid D\right)$$

bias

$$\mathbb{E}\left[\hat{f}(x) - f(x)\right]$$

P8 $f : GP(m, k)$

$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ (aléatoire)

$x \longmapsto f(x)$

si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$

$\left(\underbrace{f(x_1), \dots, f(x_n)}_{\in \mathbb{R}^n} \right)$ vecteur gaussien

$m(x) = \mathbb{E}[\underset{\in \mathbb{R}}{f(x)}]$. scalaire

$k(x, x') = \mathrm{Cov}(\underset{\in \mathbb{R}}{f(x)}, \underset{\in \mathbb{R}}{f(x')})$ scalaire

$k(x, x') = s^2 \exp\left(- \frac{\|x - x'\|^2}{2\ell} \right.$

si $\|x - x'\|^2 >> 1$

$k(x, x') \leq\leq 1$

si $\|x - x'\|^2 << 1$

$k(x, x') >> 1$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 9/15 Nombre de pages Suivant

TD N°1 :

p9

Ex 1 : $M_1 \simeq \overset{Nm}{\theta_0} + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2$

Y_1 (N)	Y_2 (N)	M_1 (N mm)
100	0	21000
0	100	12000
100	100	33000
200	100	54000

$N = 4$

$d = 2$

D désigne mécanique

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 0 \\ 1 & 0 & 100 \\ 1 & 100 & 100 \\ 1 & 200 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\theta_0 \cdot 1}_{Nm}$ = intercept l'ordonnée à l'origine.

$D \in \mathbb{R}^{4 \times (1+d)}$ avec $d = 2$

$$y = M_1 = 10^3 \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 33 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Menu Quitter Partager Liste Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire Ajouter Précédent 10/15 Nombre de pages Suivant

$y = D\,\theta$; θ^0 : (N mm) (10)

θ^2 : (mm)

θ^2 : (mm)

θ^1 : poids du Y_1

θ^2 : ——— du Y_2

$\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$

2) $Y_2 = 2Y_1$

$M_1 \simeq \theta_0 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2$

(1) $\theta_0 + \theta_1 Y_1 + 2\theta_2 Y_1$

$Y_1^T = (100, 0, 100, 200)$

(2) $\begin{cases} \theta_0 + 100\theta_1 + 200\theta_2 = 21\,10^3 \\ \theta_0 = 42\,10^3 \\ \theta_0 + 100\theta_1 + 200\theta_2 = 31\,10^3 \\ \theta_0 + 200\theta_1 + 400\theta_2 = 54\,10^3 \end{cases}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & Y_1 & 2Y_1 \\ 1 & 100 & 200 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 100 & 200 \\ 1 & 200 & 400 \end{pmatrix}$

$M_1 \simeq 10^3 \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 31 \\ 54 \end{pmatrix}$

Ajouter Précédent 11/15 Nombre de pages Suivant
Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

P12

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_0 + 100\theta_1 + 200\theta_2 = 21\,10^3 \\ \theta_0 + 200\theta_1 + 400\theta_2 = 54\,10^3 \\ \theta_0 = 12\,10^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100\theta_1 + 200\theta_2 = (21-12)\,10^3 \\ 200\theta_1 + 400\theta_2 = (54-12)\,10^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100\theta_1 + 200\theta_2 = 9\,10^3 \\ 100\theta_1 + 200\theta_2 = 16\,10^3 \end{cases}$$

- $J(\theta) = \|\underline{y} - \underline{\underline{X}}\theta\|_2^2$

= ...

$$\nabla J(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial J(\theta_1)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J(\theta_2)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$$

~~BDA~~

AED

Analyse Exploratoire des données

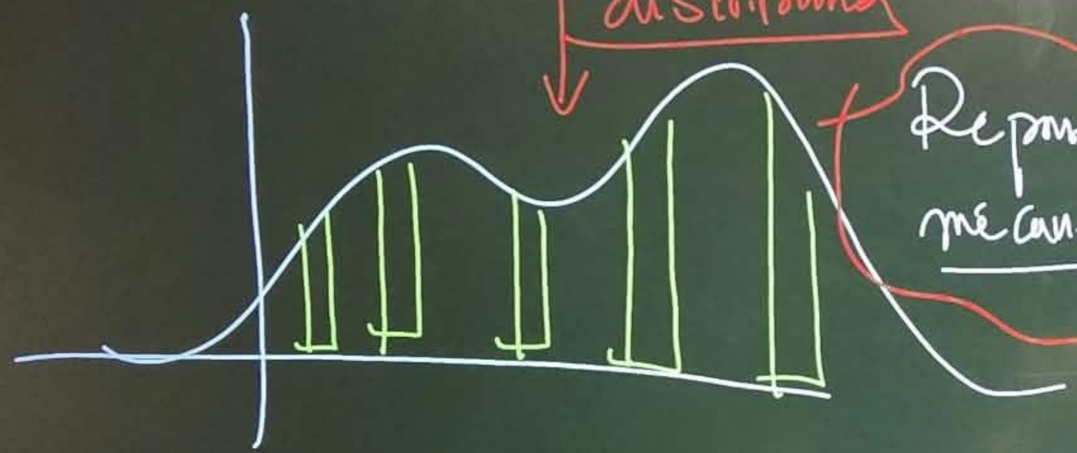
Menu Quitter Partager Liste

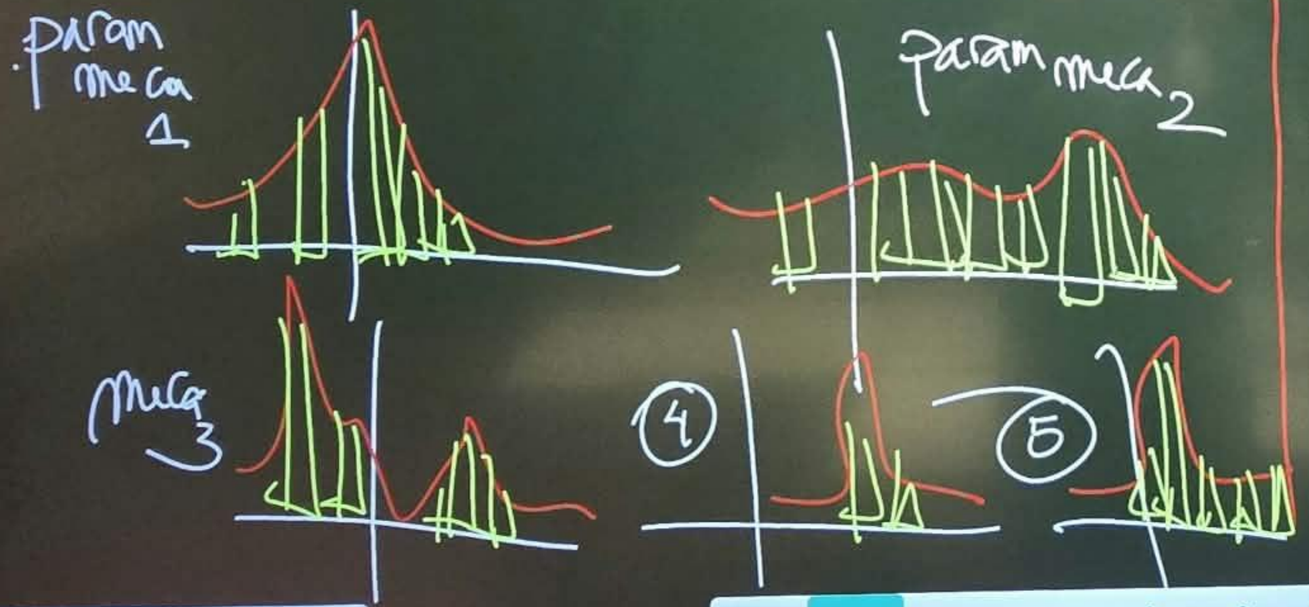
Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 12/ Nombre de

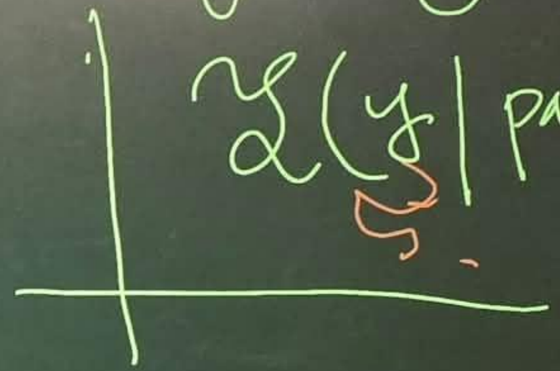
AED.

F12

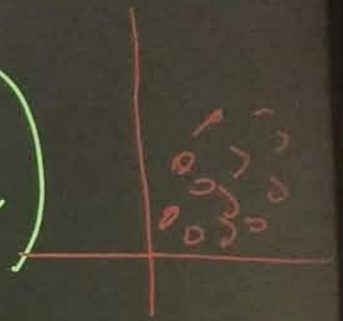




histogrammes conditionnelles



$\mathcal{L}(y \mid \text{param meca}, X)$

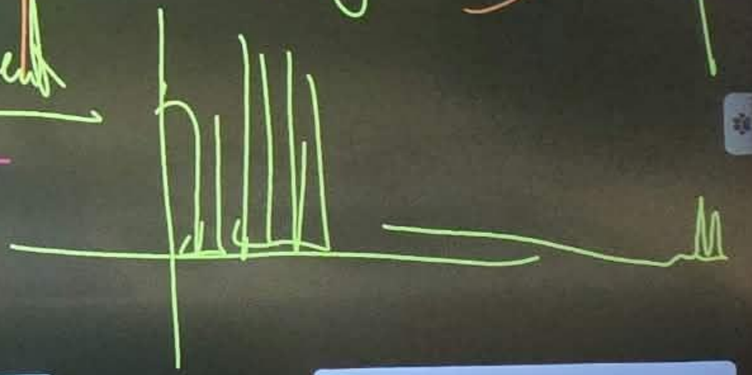


test statistique

$\text{para}_{\text{meca}}(t) \propto$

synthèse statistique

Prétraitement



$D = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

p 13

$N \times d$

Regression logistique $J(\theta)$

Regression : $y \in \mathbb{R}$

Classification

binaire

$y = \{0, 1\}$

y_1

y_2

$\vdots$

y_N

multiclasse

$d >> 1$

1Δ

x

d

Réduction de la dim

ACP

$m << d$

x_{red}

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire
Ajouter Précédent 14/15 Nombre de pages Suivant

$\mathcal{M}_{\text{prediction}} = \{ \mathcal{D}_N(\boxed{x_i}, \boxed{y_i})$ (réponse mécanique)

p14

train

$\underbrace{\mathcal{D}_N(\boxed{x_i}, \boxed{y_i})}_{\text{param mec}}$

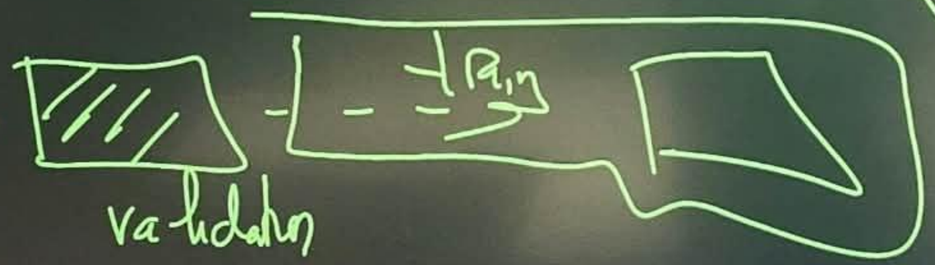
Vraie

Reg Lin : $f(x) = \theta^T x$

hyperamètres (λ) $\Big\}$ $\boxed{\lambda}$ $\in \arg\min_{\mathcal{M}_\lambda} RMSE(\mathcal{M}_\lambda)$

$\lambda = ?$

Validation Croisée

$\mathcal{M}_1(\lambda_1) \rightarrow$ 

$\mathcal{M}_{10}$ ⋮

$\rightarrow RMSE(\mathcal{M}_1)$

$RMSE(\mathcal{M}_{10})$

Menu Quitter Partager Liste

Sélectionner Stylo Gomme Tout effacer Règle Forme Tableau Note Aperçu Annuler Refaire

Ajouter Précédent 15/15 Nombre de pages Suivant