Université de Technologie de Compiègne
Master Structures et Systèmes Mécaniques Complexes (SMC)

Modélisation stochastique en mécanique

Mokhtar Z. Alaya et Salim Bouzebda

CORRIGÉ DU TD 1

# Fiabilité et dimensionnement des structures

## Exercice 1 Méthode de la résistance-sollicitation en mécanique

**Cadre.** La résistance $R$ et la sollicitation $S$ sont dans la même unité. La marge $g = R - S$ est positive lorsque la barre résiste ; la rupture correspond à $g \leq 0$. Les écarts-types $\sigma_R, \sigma_S$ sont strictement positifs. L'indépendance est supposée dans les questions 4 et 5.

### Question 1 — Intégrer la densité sur le domaine défaillant

La défaillance est l'ensemble $\{(r, s) : 0 \leq r \leq s\}$. Pour une sollicitation fixée $s$, on rassemble toutes les résistances entre 0 et $s$ :

$$\boxed{P_f = \int_0^\infty \int_0^s f(r, s)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s.}$$

On peut aussi fixer la résistance $r$ et intégrer les sollicitations supérieures à $r$. Le théorème de Tonelli s'applique à l'intégrande positif :

$$P_f = \int_0^\infty \int_r^\infty f(r, s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}r.$$

L'indépendance n'est pas nécessaire ici. L'existence d'une densité jointe implique que la droite $r = s$ a une probabilité nulle ; les critères $R < S$ et $R \leq S$ donnent alors le même résultat.

> **Interprétation mécanique**
> Il faut additionner les situations où la charge dépasse la résistance, et non comparer seulement leurs moyennes. Une corrélation entre résistance et sollicitation est déjà prise en compte si elle figure dans la densité jointe $f$.

### Question 2 — Conditionner et traiter les éventuelles égalités

- **Conditionner par la sollicitation.**

Sous indépendance, pour une valeur $s$ de $S$, $\mathbb{P}(R \leq s \mid S = s) = F_R(s)$. La formule des probabilités totales donne

$$\boxed{P_f = \mathbb{E}[F_R(S)] = \int_0^\infty F_R(s)\, \mathrm{d}F_S(s).}$$

L'intégrale par rapport à $F_S$ signifie une moyenne selon la loi de $S$. Elle reste valable si cette loi possède des atomes ; elle devient une somme pondérée lorsque $S$ est discrète.

- **Conditionner par la résistance.**

Pour $R = r$, l'événement de rupture est $S \geq r$ :

$$\mathbb{P}(S \geq r) = 1 - \mathbb{P}(S < r) = 1 - F_S(r^-).$$

En moyennant cette fois selon la loi de $R$,

$$\boxed{P_f = \int_0^\infty [1 - F_S(r^-)]\, \mathrm{d}F_R(r).}$$

Si les fonctions de répartition sont continues, $F_S(r^-) = F_S(r)$. Si elles possèdent de plus des densités, les deux expressions deviennent

$$P_f = \int_0^\infty F_R(s) f_S(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty [1 - F_S(r)] f_R(r)\,\mathrm{d}r.$$

La continuité seule ne suffit pas à remplacer une intégrale de Stieltjes par une intégrale de densité.

- **Changer le critère en $R < S$.**

L'inégalité stricte change la borne incluse dans chaque conditionnement :

$$\mathbb{P}(R < S) = \int_0^\infty F_R(s^-)\,\mathrm{d}F_S(s) = \int_0^\infty [1 - F_S(r)]\,\mathrm{d}F_R(r).$$

La différence entre les deux conventions vaut $\mathbb{P}(R = S)$. Sous indépendance, elle est la somme $\sum_a \mathbb{P}(R = a)\mathbb{P}(S = a)$ sur les atomes communs. Elle s'annule pour des lois continues indépendantes.

> **Interprétation mécanique**
> Une résistance et une sollicitation arrondies à des valeurs discrètes peuvent être exactement égales. Le choix de classer cette égalité comme défaillance doit alors apparaître dans les formules. Avec des lois continues indépendantes, ce choix ne change pas le risque calculé.

### Question 3 — Variables standardisées et domaine de rupture

- **Centrer, puis diviser par l'écart-type.**

Par définition,

$$U_R = \frac{R - m_R}{\sigma_R}, \qquad U_S = \frac{S - m_S}{\sigma_S}.$$

Ces variables sont sans dimension et vérifient

$$\mathbb{E}[U_R] = \frac{\mathbb{E}[R] - m_R}{\sigma_R} = 0, \qquad \mathrm{Var}(U_R) = \frac{\mathrm{Var}(R)}{\sigma_R^2} = 1,$$

avec les mêmes propriétés pour $U_S$. Les transformations inverses sont $R = m_R + \sigma_R U_R$ et $S = m_S + \sigma_S U_S$.

- **Substituer dans la marge.**

Pour une réalisation $(u_R, u_S)$,

$$g = (m_R + \sigma_R u_R) - (m_S + \sigma_S u_S) = m_R - m_S + \sigma_R u_R - \sigma_S u_S.$$

La frontière $R = S$ devient donc

$$\boxed{\sigma_R u_R - \sigma_S u_S + (m_R - m_S) = 0.}$$

Le domaine de rupture est le demi-plan

$$\boxed{\sigma_R u_R - \sigma_S u_S \leq -(m_R - m_S).}$$

Comme $\sigma_S > 0$, on peut aussi écrire $u_S \geq (\sigma_R/\sigma_S) u_R + (m_R - m_S)/\sigma_S$ : si $u_S$ est l'axe vertical, la rupture se situe au-dessus de la droite, frontière comprise.

> **Interprétation mécanique**
> Une baisse de la résistance ($u_R$ diminue) et une hausse de la sollicitation ($u_S$ augmente) rapprochent toutes deux la barre de la rupture. L'origine représente le couple de valeurs moyennes $(m_R, m_S)$. Elle est dans le domaine sûr si $m_R > m_S$, sur la frontière si les moyennes sont égales et dans le domaine défaillant si $m_R < m_S$.

### Question 4 — Distance à la frontière et indice de fiabilité

Posons $d = m_R - m_S$, $\boldsymbol{a} = (\sigma_R, -\sigma_S)^\mathsf{T}$ et $\boldsymbol{u} = (u_R, u_S)^\mathsf{T}$. La droite s'écrit $\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} + d = 0$. Le point le plus proche de l'origine minimise $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$ sous cette contrainte. Le lagrangien est

$$L(\boldsymbol{u}, \nu) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} + \nu(\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} + d).$$

L'annulation des dérivées impose

$$\boldsymbol{u} + \nu\boldsymbol{a} = 0, \qquad \boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} + d = 0.$$

En remplaçant $\boldsymbol{u}$ par $-\nu\boldsymbol{a}$, on obtient $-\nu\|\boldsymbol{a}\|^2 + d = 0$, puis

$$\nu = \frac{d}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}, \qquad \boldsymbol{u}_* = -\frac{d}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}\begin{pmatrix}\sigma_R \\ -\sigma_S\end{pmatrix}.$$

La fonction minimisée est strictement convexe : ce point est bien l'unique projection sur la droite. Sa norme donne

$$\beta_2^2 = \|\boldsymbol{u}_*\|^2 = \frac{d^2(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)}{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^2}, \qquad \boxed{\beta_2 = \frac{|m_R - m_S|}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.}$$

Si $m_R > m_S$, $d > 0$ et $|d| = d$ : on peut supprimer la valeur absolue. L'indice est sans dimension.

> **Interprétation mécanique**
>
> La distance rapporte la marge moyenne à l'amplitude des fluctuations. Lorsque $d > 0$, le point le plus proche de la rupture a $u_R < 0$ et $u_S > 0$ : la résistance baisse pendant que la sollicitation augmente. La distance reste une grandeur géométrique de second moment. Dans l'approximation où $R, S$ sont gaussiennes indépendantes, les coordonnées $U_R, U_S$ sont normales standard indépendantes et $\beta_2 = \beta_{HL}$, l'indice de Hasofer et Lind. Pour des lois non gaussiennes, le seul centrage-réduction ne suffit pas : une transformation vers l'espace normal standard est nécessaire pour définir cet indice dans son cadre usuel. Le lien probabiliste demandé ensuite repose sur l'hypothèse gaussienne.

### Question 5 — Probabilité de rupture dans le modèle gaussien

Par linéarité de l'espérance et indépendance,

$$m_Z = \mathbb{E}[R - S] = m_R - m_S, \qquad \sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\,\mathrm{Cov}(R, S) = \sigma_R^2 + \sigma_S^2.$$

L'hypothèse $Z \sim \mathcal{N}(m_Z, \sigma_Z^2)$ donne $(Z - m_Z)/\sigma_Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Par conséquent,

$$P_f = \mathbb{P}(Z \le 0) = \mathbb{P}\left(\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z} \le \frac{-m_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right).$$

Définissons l'indice *signé* $\beta_s = (m_R - m_S)/\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$. Alors $P_f = \Phi(-\beta_s)$ dans tous les cas. Pour $m_R \ge m_S$, $\beta_s = \beta_2$ et $\boxed{P_f = \Phi(-\beta_2)}$. Pour $m_R < m_S$, $\beta_s = -\beta_2 < 0$ et $P_f > 1/2$. Si $m_R = m_S$, on obtient exactement $P_f = 1/2$. Dans le cas de résistances et sollicitations gaussiennes indépendantes, $\beta_2 = \beta_{HL}$ comme à la question précédente.

> **Interprétation mécanique**
>
> Pour une marge moyenne positive, augmenter la résistance moyenne ou réduire la dispersion augmente l'indice et diminue le risque prédit. Utiliser une distance positive lorsque la sollicitation moyenne dépasse la résistance moyenne donnerait à tort un risque inférieur à $1/2$. Le modèle gaussien autorise des queues négatives ; c'est ici l'approximation annoncée dans l'énoncé, à apprécier au regard des grandeurs physiques.

### Question 6 — Dépendance par une cause commune

- **Vérifier la représentation par trois variables exponentielles.**

Avec $R = \min(T_1, T_{12})$ et $S = \min(T_2, T_{12})$,

$$\{R > r, S > s\} = \{T_1 > r,\ T_2 > s,\ T_{12} > \max(r, s)\}.$$

L'indépendance des trois variables et leur survie exponentielle donnent bien $\exp[-\lambda_1 r - \lambda_2 s - \lambda_{12}\max(r,s)]$. Posons $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$.

- **Identifier le premier événement.**

Les variables $T_1, T_2, T_{12}$ sont continues indépendantes : deux d'entre elles ne sont pas égales, presque sûrement. Il reste trois cas disjoints. Si $T_2$ arrive en premier, $S = T_2 < \min(T_1, T_{12}) = R$ : la barre est dans le domaine sûr. Si $T_1$ arrive en premier, $R < S$. Si $T_{12}$ arrive en premier, $R = S = T_{12}$ : la cause commune produit une égalité de probabilité non nulle.

- **Calculer les probabilités par intégration.**

La densité de $T_2$ est $\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$, tandis que $\mathbb{P}(T_1 > t, T_{12} > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t}$. Ainsi,

$$\mathcal{R} = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\Lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda_2 \left[-\frac{e^{-\Lambda t}}{\Lambda}\right]_0^\infty = \boxed{\frac{\lambda_2}{\Lambda}}.$$

En appliquant le même calcul aux deux autres variables,

$$\mathbb{P}(R < S) = \frac{\lambda_1}{\Lambda}, \qquad \mathbb{P}(R = S) = \frac{\lambda_{12}}{\Lambda}, \qquad \boxed{P_f = \frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\Lambda}}.$$

Les trois probabilités totalisent 1. Les paramètres $\lambda_i$ ont l'unité inverse de celle de $R, S$ ; leurs rapports sont sans dimension.

> **Interprétation mécanique**
> Le terme commun $T_{12}$ crée une masse de probabilité sur la frontière $R = S$. Bien que les deux lois marginales soient continues, la loi jointe n'a pas une densité ordinaire sur tout le plan : une partie de sa masse est sur la diagonale. Oublier cette partie sous-estimerait $P_f$ de $\lambda_{12}/\Lambda$. Les variables $T_i$ servent ici à représenter la dépendance ; elles ne sont pas des temps physiques si $R, S$ sont des contraintes.

## Exercice 2 Poutre à charge aléatoire

**Données et signes.** $\ell = 1000$ mm, $x_1 = 300$ mm et $x_2 = 600$ mm. Les charges $Y_1, Y_2$ sont positives vers le bas et les réactions $R_A, R_B$ vers le haut. Le moment positif met la fibre inférieure en traction. Les équations ci-dessous sont valables pour chaque réalisation des charges.

### Question 1 — Réaction verticale de l'appui A

- **Écrire les deux équations d'équilibre.**

L'équilibre des forces verticales et celui des moments autour de $A$ donnent respectivement

$$R_A + R_B - Y_1 - Y_2 = 0, \qquad \ell R_B - x_1 Y_1 - x_2 Y_2 = 0.$$

La réaction en $A$ n'apparaît pas dans le second bilan, car son bras de levier par rapport à $A$ est nul. En isolant $R_B$,

$$R_B = \frac{x_1}{\ell} Y_1 + \frac{x_2}{\ell} Y_2 = 0{,}3 Y_1 + 0{,}6 Y_2.$$

La première équation conduit alors à

$$R_A = Y_1 + Y_2 - R_B = (1 - 0{,}3) Y_1 + (1 - 0{,}6) Y_2, \qquad \boxed{R_A = 0{,}7 Y_1 + 0{,}4 Y_2.}$$

Les coefficients sont sans dimension et $R_A$ s'exprime en N. Vérification : $R_A + R_B = (0{,}7 + 0{,}3)Y_1 + (0{,}4 + 0{,}6)Y_2 = Y_1 + Y_2$.

> **Interprétation mécanique**
> La charge située à $0{,}3\ell$, plus proche de l'appui $A$, contribue à 70 % à sa réaction ; celle située à $0{,}6\ell$ y contribue à 40 %. L'équilibre transforme ainsi les charges aléatoires en une réaction aléatoire par une combinaison linéaire déterminée uniquement par la géométrie.

### Question 2 — Moments aux deux sections chargées

- **Section située en $x_1 = 300$ mm.**

On isole la portion située à gauche de la coupe. La charge $Y_1$ est à la coupe : son bras de levier y est nul. Il reste

$$M_1 = R_A x_1 = 300(0{,}7Y_1 + 0{,}4Y_2) = \boxed{210Y_1 + 120Y_2}.$$

- **Section située en $x_2 = 600$ mm.**

La première charge agit maintenant avec le bras de levier $x_2 - x_1 = 300$ mm. La charge $Y_2$, à la coupe, a un bras nul. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_2 &= R_A x_2 - Y_1(x_2 - x_1) \\ &= 600(0{,}7Y_1 + 0{,}4Y_2) - 300Y_1 \\ &= (420 - 300)Y_1 + 240Y_2 = \boxed{120Y_1 + 240Y_2}. \end{aligned}$$

Les coefficients 210, 120 et 240 ont l'unité mm ; les moments sont en N mm. En regroupant les deux résultats,

$$\boxed{\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{pmatrix}}_{\text{coefficients en mm}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}}.$$

On retrouve $M_2$ en coupant à droite : $M_2 = R_B(1000 - 600) = 400(0{,}3Y_1 + 0{,}6Y_2)$.

> **Interprétation mécanique**
> Chaque coefficient est un bras de levier effectif. Les deux moments dépendent des mêmes charges : ils ne peuvent donc pas être traités comme des réponses indépendantes sans analyser leur loi. La poutre est isostatique : les moments s'obtiennent par l'équilibre, sans connaître le module d'Young ni la rigidité en flexion. Ces propriétés interviennent dans les déformations.

### Question 3 — Construire la décomposition de Cholesky

La covariance des charges, en N$^2$, est

$$V = \begin{pmatrix} 10000 & 5000 \\ 5000 & 10000/3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons $C = \left(\begin{smallmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\right)$ à diagonale positive. L'égalité $CC^{\mathsf{T}} = V$ impose successivement

$$c_{11}^2 = 10000, \qquad c_{11}c_{21} = 5000, \qquad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 10000/3.$$

Donc $c_{11} = 100$, $c_{21} = 50$ et

$$c_{22} = \sqrt{10000/3 - 2500} = \frac{100}{\sqrt{12}} \simeq 28{,}8675.$$

On obtient

$$\boxed{C = 100 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} \end{pmatrix}} \quad \text{(coefficients en N).}$$

Le terme sous la dernière racine est positif. Plus généralement, $v_{11} > 0$ et $\det V = 10^8(1/3 - 1/4) = 10^8/12 > 0$ : la covariance est définie positive, ce qui justifie la factorisation.

> **Interprétation mécanique**
> Le coefficient $c_{21}$ transmet une partie de la même fluctuation aux deux charges. Le coefficient $c_{22}$ représente une fluctuation supplémentaire de $Y_2$, indépendante de la première. Une covariance est en N$^2$, tandis que les amplitudes dans $C$ sont en N.

### Question 4 — Produire les charges à partir de normales indépendantes

Soient $Z_1, Z_2$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc sans dimension. La transformation affine d'un vecteur gaussien donne

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}}, \qquad \begin{cases} Y_1 = 800 + 100Z_1, \\ Y_2 = 400 + 50Z_1 + \dfrac{100}{\sqrt{12}}Z_2. \end{cases}$$

Vérification : $\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{m} + C\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] = \boldsymbol{m}$ et $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}) = CIC^{\mathsf{T}} = V$. En particulier, $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 100 \times 50 = 5000$ N$^2$. La corrélation vaut $5000/(100 \times 100/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$.

> **Interprétation mécanique**
> Simuler séparément deux charges avec les bonnes moyennes et variances ne suffit pas : on perdrait leur forte corrélation positive. La variable commune $Z_1$ reproduit les situations où les deux charges fluctuent ensemble, ce qui influence la dispersion des moments.

### Question 5 — Moment le long de la poutre et loi des réponses

- **Équilibrer chaque portion de poutre.**

Avec $x$ en mm et $a_+ = \max(a, 0)$, une expression unique est

$$\boxed{M(x) = R_A x - Y_1(x - 300)_+ - Y_2(x - 600)_+.}$$

Elle se lit par morceaux : $R_A x$ sur $[0, 300]$, $R_A x - Y_1(x-300)$ sur $[300, 600]$ et $R_A x - Y_1(x-300) - Y_2(x-600)$ sur $[600, 1000]$. Le moment est continu aux charges ponctuelles ; sa pente y change. Aux appuis, $M(0) = 0$ et $M(1000) = 1000R_A - 700Y_1 - 400Y_2 = 0$, conformément à l'équilibre.

- **Passer du moment à la contrainte.**

Le module de résistance $W = 1800$ mm$^3$ donne

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{210Y_1 + 120Y_2}{1800}, \qquad \sigma_2 = \frac{120Y_1 + 240Y_2}{1800}.}$$

Les contraintes sont en N/mm$^2$, soit en MPa. Leur signe indique quelle fibre est en traction ; leur valeur absolue est utilisée pour le critère symétrique de résistance demandé.

- **Propager la loi gaussienne.**

Pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$. Une transformation linéaire conserve la gaussianité :

$$\boxed{\boldsymbol{M} \sim \mathcal{N}_2(A\boldsymbol{m}, AVA^{\mathsf{T}})}, \qquad A\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 210(800) + 120(400) \\ 120(800) + 240(400) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216000 \\ 192000 \end{pmatrix} \text{ N mm}.$$

Pour détailler le calcul de covariance,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(M_1) &= 210^2(10000) + 120^2(10000/3) + 2(210)(120)(5000) \\ &= 741000000, \\ \mathrm{Var}(M_2) &= 120^2(10000) + 240^2(10000/3) + 2(120)(240)(5000) \\ &= 624000000, \\ \mathrm{Cov}(M_1, M_2) &= (210)(120)(10000) + (120)(240)(10000/3) \\ &\quad + [(210)(240) + (120)(120)](5000) = 672000000. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$AVA^{\mathsf{T}} = 10^6 \begin{pmatrix} 741 & 672 \\ 672 & 624 \end{pmatrix} \quad \text{en (N mm)}^2.$$

Les contraintes ont une moyenne $(120,106{,}6667)^{\mathsf{T}}$ MPa et une covariance obtenue en divisant cette matrice par $W^2$, soit environ $\left(\begin{smallmatrix} 228{,}7037 & 207{,}4074 \\ 207{,}4074 & 192{,}5926 \end{smallmatrix}\right)$ en MPa$^2$.

> **Interprétation mécanique**
> Les charges communes et la géométrie corrèlent fortement les deux sections. Le terme de covariance intervient dans toute étude conjointe de rupture. Les moments ne dépendent ici que de l'équilibre isostatique ; le module de résistance transforme ensuite ces efforts internes en contraintes.

### Question 6 — Écrire l'événement de non-rupture

Le seuil de moment correspondant à la contrainte admissible vaut

$$M_a = W\sigma_a = 1800 \times 250 = 450000 \text{ N mm}.$$

Sur chaque tronçon, $M(x)$ est affine ; la valeur absolue d'une fonction affine atteint son maximum à une extrémité du tronçon. Comme les moments aux appuis sont nuls, le maximum global est $\max(|M_1|, |M_2|)$. Les deux sections choisies suffisent donc pour ce modèle.

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathbb{P}(-M_a < M_1 < M_a,\ -M_a < M_2 < M_a).}$$

Si $F_M(a,b) = \mathbb{P}(M_1 \le a, M_2 \le b)$ désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne trouvée à la question 5, la continuité donne

$$\mathcal{R} = F_M(M_a, M_a) - F_M(-M_a, M_a) - F_M(M_a, -M_a) + F_M(-M_a, -M_a).$$

C'est une probabilité de rectangle pour une loi *jointe*. On ne peut pas multiplier les deux probabilités marginales, car les moments sont corrélés.

> **Interprétation mécanique**
> Il faut que toutes les sections critiques restent admissibles dans la même réalisation du chargement. Les valeurs absolues prennent aussi en compte une inversion du signe de flexion, possible avec la loi gaussienne.

### Question 7 — Calculer les deux réalisations et interpréter la fréquence

- **Transformer les quatre uniformes.**

Pour $(a,b) = (0{,}92, 0{,}32)$, l'amplitude Box–Muller est $\sqrt{-2\log(0{,}92)}$ et l'angle $2\pi(0{,}32)$. Pour $(a,b) = (0{,}35, 0{,}79)$, on recommence avec une paire indépendante. Les résultats, puis les charges obtenues par la question 4, sont :

| Essai | $z_1$ | $z_2$ | $Y_1$ (N) | $Y_2$ (N) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-0{,}173874$ | $0{,}369501$ | $782{,}6126$ | $401{,}9729$ |
| 2 | $0{,}360355$ | $-1{,}403491$ | $836{,}0355$ | $377{,}5025$ |

Par exemple, la première charge secondaire vaut $400 + 50(-0{,}173874) + (100/\sqrt{12})(0{,}369501) \simeq 401{,}9729$ N.

- **Calculer les moments puis les contraintes.**

On emploie les mêmes coefficients mécaniques pour chaque réalisation :

| Essai | $M_1$ (N mm) | $M_2$ (N mm) | $\sigma_1$ (MPa) | $\sigma_2$ (MPa) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $212585{,}39$ | $190387{,}00$ | $118{,}1030$ | $105{,}7706$ |
| 2 | $220867{,}76$ | $190924{,}85$ | $122{,}7043$ | $106{,}0694$ |

La contrainte maximale en valeur absolue vaut respectivement $118{,}1030$ et $122{,}7043$ MPa. Toutes deux sont inférieures à $250$ MPa : les deux essais sont non défaillants.

- **Former l'estimateur.**

En notant $I_j = \mathbf{1}_{\{\max_i |\sigma_i^{(j)}|<250\}}$, on trouve

$$\boxed{\widehat{\mathcal{R}}_2 = \frac{I_1 + I_2}{2} = 1}, \qquad \widehat{P}_{f,2} = 0.$$

Ce sont des fréquences observées, pas les probabilités exactes. Pour deux essais indépendants, la probabilité d'observer deux succès est $\mathcal{R}^2$ : elle vaut encore $0{,}81$ si la véritable fiabilité vaut $0{,}9$. Deux succès ne permettent donc pas de distinguer une très grande fiabilité d'une valeur nettement plus faible.

> **Interprétation mécanique**
> Les calculs montrent que ces deux chargements sont admissibles. Ils ne démontrent pas l'absence de risque en exploitation. Pour mesurer une petite probabilité de rupture, il faut beaucoup plus de réalisations ou une méthode adaptée aux événements rares ; une fréquence nulle sur deux essais n'est pas un certificat de sûreté.

## Exercice 3 Charge aléatoire

**Données.** $R \sim \mathcal{U}[r_1, r_2]$ et $S \sim \mathcal{U}[s_1, s_2]$ sont indépendantes, avec $0 < s_1 < r_1 < s_2 < r_2$. Toutes les bornes ont la même unité physique. On note $\Delta r = r_2 - r_1$ et $\Delta s = s_2 - s_1$.

### Question 1 — Intégrer la zone de défaillance dans le rectangle

La densité jointe est constante, égale à $1/(\Delta r \Delta s)$, sur $[r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$. Pour $s < r_1$, aucune résistance admissible n'est inférieure à $s$. Pour $r_1 \le s \le s_2$, la résistance doit appartenir à $[r_1, s]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{\Delta r \Delta s} \int_{r_1}^{s_2} \int_{r_1}^{s} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\Delta r \Delta s} \int_{r_1}^{s_2} (s - r_1) \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Delta r \Delta s} \left[ \frac{(s - r_1)^2}{2} \right]_{r_1}^{s_2} = \boxed{\frac{(s_2 - r_1)^2}{2(r_2 - r_1)(s_2 - s_1)}}. \end{aligned}$$

Géométriquement, la zone de rupture est un triangle rectangle de côtés $s_2 - r_1$. Sa surface divisée par celle du rectangle des couples possibles donne la même probabilité. Les unités au numérateur et au dénominateur se compensent.

> **Interprétation mécanique**
> Seule la zone où les sollicitations les plus fortes rencontrent les résistances les plus faibles contribue au risque. Le recouvrement des deux intervalles, de longueur $s_2 - r_1$, intervient au carré.

### Question 2 — Calculer la moyenne du rapport de sécurité

L'indépendance permet de factoriser l'espérance, et $s_1 > 0$ garantit que $1/S$ est bornée :

$$\tau = \mathbb{E}[R/S] = \mathbb{E}[R]\mathbb{E}[1/S], \qquad \mathbb{E}[R] = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

La seconde espérance se calcule par intégration :

$$\mathbb{E}[1/S] = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\log(s_2/s_1)}{s_2 - s_1}.$$

Il en résulte

$$\boxed{\tau = \frac{(r_1 + r_2)\log(s_2/s_1)}{2(s_2 - s_1)}}, \qquad \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[S]} = \frac{r_1 + r_2}{s_1 + s_2}.$$

Ces expressions ne sont pas égales. La fonction $s \mapsto 1/s$ est strictement convexe sur $s > 0$, car sa dérivée seconde vaut $2/s^3 > 0$. Comme $S$ n'est pas constante, l'inégalité stricte de Jensen donne $\mathbb{E}[1/S] > 1/\mathbb{E}[S]$. En multipliant par $\mathbb{E}[R] > 0$,

$$\boxed{\mathbb{E}[R/S] > \mathbb{E}[R]/\mathbb{E}[S].}$$

**Interprétation mécanique**

Les faibles sollicitations produisent des rapports $R/S$ élevés, qui augmentent la moyenne de ce rapport. Le coefficient moyen et le rapport des moyennes sont donc deux indicateurs différents ; aucun ne remplace à lui seul la probabilité de rupture.

### Question 3 — Application numérique

- **Calculer la probabilité de défaillance.**

Les différences nécessaires sont

$$s_2 - r_1 = 4 - 3 = 1, \qquad r_2 - r_1 = 6 - 3 = 3, \qquad s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3.$$

En les remplaçant dans la formule de la question 1,

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{(s_2 - r_1)^2}{2(r_2 - r_1)(s_2 - s_1)} = \frac{(4-3)^2}{2(6-3)(4-1)} \\ &= \frac{1^2}{2 \times 3 \times 3} = \boxed{\frac{1}{18} \simeq 0{,}055556 = 5{,}5556\,\%.} \end{aligned}$$

- **Calculer le coefficient de sécurité moyen.**

Dans la formule de la question 2, $r_1 + r_2 = 9$, $s_2/s_1 = 4$ et $2(s_2 - s_1) = 6$. Le logarithme est le logarithme népérien. Donc

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(r_1 + r_2)\log(s_2/s_1)}{2(s_2 - s_1)} = \frac{(3+6)\log(4/1)}{2(4-1)} \\ &= \frac{9}{6}\log 4 = \frac{3}{2}\log 4. \end{aligned}$$

Avec $\log 4 \simeq 1{,}386294361$, on obtient

$$\boxed{\tau \simeq 1{,}5 \times 1{,}386294361 = 2{,}079441542.}$$

À titre de comparaison, $\mathbb{E}[R]/\mathbb{E}[S] = 4{,}5/2{,}5 = 1{,}8 < \tau$. $P_f$ est une probabilité et $\tau$ un rapport de grandeurs de même unité : les deux résultats sont sans dimension.

**Interprétation mécanique**

Un coefficient de sécurité moyen d'environ $2{,}08$ coexiste ici avec une probabilité de rupture d'environ $5{,}56\,\%$ par réalisation du modèle. Le rapport $R/S$ peut être très élevé lorsque la charge est faible ; ces situations augmentent sa moyenne sans supprimer les cas où une charge forte rencontre une faible résistance. Ainsi, $\tau > 1$ ne garantit pas l'absence de rupture : la décision de dimensionnement doit aussi porter sur le risque de franchir le seuil $R = S$.

## Exercice 4 Barre à résistance et sollicitation gaussiennes

**Paramètres rappelés.** En MPa : $m_R = 300$, $\sigma_R = 30$, $m_S = 200$, $\sigma_S = 20$. La marge est $G = R - S$.

### Question 1 — Cas indépendant

Une différence de normales indépendantes est normale. Sa moyenne et sa variance se calculent séparément :

$$\mathbb{E}[G] = 300 - 200 = 100, \qquad \mathrm{Var}(G) = 30^2 + 20^2 = 900 + 400 = 1300 \text{ MPa}^2.$$

Ainsi $\boxed{G \sim \mathcal{N}(100, 1300)}$, avec la moyenne en MPa et la variance en MPa$^2$. Donc $\sigma_G = \sqrt{1300} = 36{,}0555$ MPa et

$$\beta = \frac{100}{36{,}0555} = 2{,}77350, \quad P_f = \mathbb{P}(G \le 0) = \Phi\left(\frac{0 - 100}{36{,}0555}\right) \simeq 0{,}00277283.$$

L'indice est sans dimension ; $P_f$ représente environ $0{,}2773\,\%$.

### Question 2 — Introduire la covariance sans changer les marginales

Pour une paire conjointement gaussienne de corrélation $0{,}5$,

$$\mathrm{Cov}(R, S) = 0{,}5(30)(20) = 300 \text{ MPa}^2.$$

En développant $\mathbb{E}[((R - m_R) - (S - m_S))^2]$, le terme croisé porte un signe négatif. D'où

$$\mathrm{Var}(G) = 900 + 400 - 2(300) = 700, \qquad \beta = 100/\sqrt{700} = 3{,}77964,$$

$$P_f = \Phi(-3{,}77964) \simeq 7{,}85261 \times 10^{-5}.$$

La loi est maintenant $\boxed{G \sim \mathcal{N}(100, 700)}$, dans les mêmes unités. La variance de la marge diminue alors que sa moyenne reste positive. Plus précisément, pour $m = m_R - m_S > 0$ et $v = \mathrm{Var}(G)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\Phi(-m/\sqrt{v}) = \phi(m/\sqrt{v})m/(2v^{3/2}) > 0$. Ici $\phi(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$ est la densité normale standard. Réduire $v$ réduit donc ici le risque ; le signe changerait si $m < 0$.

### Question 3 — Construire l'intervalle à partir des indicatrices

On revient au cas indépendant de la question 1 ; la probabilité analytique de comparaison est donc $0{,}00277283$, et non celle du cas corrélé. Pour $I_j = \mathbf{1}_{\{G_j \le 0\}}$, on a $\mathbb{E}[I_j] = p$ et $\mathrm{Var}(I_j) = p(1-p)$. Si les essais sont indépendants,

$$\widehat{p} = \frac{280}{100000} = 0{,}0028, \qquad \widehat{\mathrm{se}} = \sqrt{\frac{0{,}0028(0{,}9972)}{100000}} \simeq 0{,}00016710.$$

L'approximation normale conduit à

$$\widehat{p} \pm 1{,}96\widehat{\mathrm{se}} = [0{,}00247249; 0{,}00312751].$$

Les effectifs $280$ et $99720$ sont suffisants pour cette approximation. La valeur analytique $0{,}00277283$ appartient à l'intervalle et l'écart $|0{,}0028 - 0{,}00277283|/\widehat{\mathrm{se}} \simeq 0{,}16$ est faible. Cet intervalle décrit l'incertitude sur $p$, pas la dispersion des contraintes.

### Question 4 — Zéro rupture : inverser une probabilité binomiale

On considère une nouvelle campagne de 1000 essais dans le même cas indépendant ; les observations de la question 3 ne sont pas cumulées avec elle. Avec $K \sim \mathrm{Bin}(1000, p)$, $\mathbb{P}_p(K = 0) = (1-p)^{1000}$. La borne supérieure unilatérale à 95 % est

$$(1 - p_{\sup})^{1000} = 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad p_{\sup} = 1 - \exp(\log(0{,}05)/1000) \simeq 0{,}00299125.$$

Comme $e^x \simeq 1 + x$ près de zéro, $p_{\sup} \simeq -\log(0{,}05)/1000 \simeq 3/1000$. Ce résultat est très supérieur à $10^{-4}$. À titre de repère, rendre cette borne inférieure à $10^{-4}$ avec zéro échec nécessiterait au moins $\lceil \log(0{,}05)/\log(1 - 10^{-4}) \rceil = 29956$ essais indépendants.

**Interprétation mécanique**

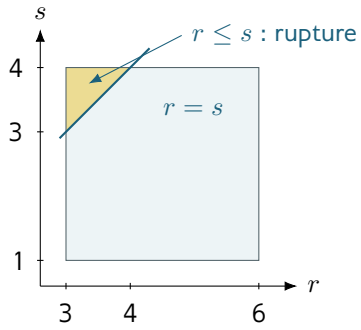
Une résistance et une sollicitation qui augmentent ensemble peuvent réduire les fluctuations de leur différence. Cela ne signifie pas que toute corrélation est favorable : pour une somme de charges de flexion, l'effet peut être opposé. Les essais doivent aussi être assez nombreux pour documenter le niveau de risque visé ; l'absence de rupture n'est pas une preuve de risque nul.

## Exercice 5 Deux lois uniformes positives

**Données.** $R \sim \mathcal{U}[3,6]$ et $S \sim \mathcal{U}[1,4]$ sont indépendantes, dans la même unité. La défaillance est $R \le S$ et $\tau = \mathbb{E}[R/S]$.

### Question 1 — Calcul géométrique et intégral

L'indépendance donne $f_{R,S} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ dans $[3,6]\times[1,4]$. La région $r \le s$ a pour sommets $(3,3),(3,4),(4,4)$ ; son aire est $1 \times 1/2$. Ainsi $P_f = 1/18$.




La zone colorée est la seule partie du rectangle où la sollicitation atteint ou dépasse la résistance. Sa frontière a une probabilité nulle ici. En intégrant dans l'autre description, à $s$ fixé,

$$\mathbb{P}(R \le s) = \frac{s-3}{3} \quad (3 \le s \le 4),$$

$$P_f = \int_3^4 \frac{s-3}{3}\frac{\mathrm{d}s}{3} = \frac{1}{9}\left[\frac{(s-3)^2}{2}\right]_3^4 = \frac{1}{18}.$$

### Question 2 — Séparer les deux facteurs de l'espérance

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{3}\int_3^6 r\,\mathrm{d}r = \frac{36-9}{6} = 4{,}5, \quad \mathbb{E}[1/S] = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\log 4}{3}.$$

D'où $\tau = 4{,}5\log 4/3 = 2{,}07944$. Le rapport des espérances vaut $4{,}5/[(1+4)/2] = 1{,}8$. L'égalité échoue parce que la fonction inverse n'est pas linéaire.

### Question 3 — Généralisation

Les largeurs du rectangle deviennent $r_2 - r_1$ et $s_2 - s_1$ ; le triangle a pour côté $s_2 - r_1$. En écrivant également l'intégrale,

$$P_f = \frac{\int_{r_1}^{s_2}(s-r_1)\,\mathrm{d}s}{(r_2-r_1)(s_2-s_1)} = \frac{(s_2-r_1)^2}{2(r_2-r_1)(s_2-s_1)}.$$

Pour $s_1 > 0$,

$$\tau = \frac{r_1+r_2}{2}\,\frac{\log(s_2/s_1)}{s_2-s_1}.$$

L'hypothèse $s_1 > 0$ garantit l'intégrabilité de $1/S$ ; pour $s_1 = 0$, $\int_0^{s_2} \mathrm{d}s/s$ diverge. Les unités s'annulent dans $R/S$ et dans $P_f$.

**Interprétation mécanique**

Le domaine triangulaire représente les combinaisons effectivement dangereuses. Augmenter la borne inférieure de résistance réduit directement cette zone ; augmenter seulement une moyenne ne décrit pas cet effet. Les deux calculs, par aire et par intégrale, offrent un contrôle simple d'une méthode de simulation de la rupture.

## Exercice 6 Fiabilité générale et dépendance commune — approfondissement

**Cadre.** $R, S$ sont positives et de même unité ; $P_f = \mathbb{P}(R \le S)$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}(R > S)$. Les variables auxiliaires $T_1, T_2, T_{12}$ sont indépendantes et exponentielles ; leurs paramètres sont strictement positifs.

### Question 1 — Distinguer densité et loi générale

Quand la densité existe, $P_f = \int_0^\infty \int_0^s f(r,s)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$. Sous indépendance mais sans supposer de densité, on conditionne successivement par chaque variable :

$$P_f = \int \mathbb{P}(R \le s)\,\mathrm{d}F_S(s) = \int F_R(s)\,\mathrm{d}F_S(s),$$
$$P_f = \int \mathbb{P}(S \ge r)\,\mathrm{d}F_R(r) = \int [1 - F_S(r^-)]\,\mathrm{d}F_R(r).$$

Par exemple, si $R = S = a$ de façon déterministe, les variables sont indépendantes au sens probabiliste et la seconde intégrale vaut $1 - F_S(a^-) = 1$ ; remplacer la limite à gauche par $F_S(a) = 1$ donnerait à tort zéro.

### Question 2 — Calculer la survie du modèle commun

L'événement $R = \min(T_1, T_{12}) > r$ impose $T_1 > r$ et $T_{12} > r$. La condition $S > s$ impose $T_2 > s$ et $T_{12} > s$. En les réunissant,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R > r, S > s) &= e^{-\lambda_1 r} e^{-\lambda_2 s} e^{-\lambda_{12}\max(r,s)} \\ &= e^{-\lambda_1 r - \lambda_2 s - \lambda_{12}\max(r,s)}.\end{aligned}$$

Le minimum $T_* = \min(T_1, T_2, T_{12})$ a également pour survie

$$\mathbb{P}(T_* > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})t};$$

il suit donc une loi exponentielle de paramètre $\Lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$. Pour $s = 0$, on obtient $R \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1+\lambda_{12})$ ; pour $r = 0$, $S \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2 + \lambda_{12})$.

### Question 3 — Partager l'espace en trois événements exclusifs

Avec $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$,

$$\mathbb{P}(T_j = \min(T_1, T_2, T_{12})) = \int_0^\infty \lambda_j e^{-\Lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda_j/\Lambda.$$

Le minimum $T_2$ correspond à $R > S$, le minimum $T_1$ à $R < S$, et le minimum $T_{12}$ à $R = S$. Ainsi

$$\mathcal{R} = \lambda_2/\Lambda, \quad \mathbb{P}(R = S) = \lambda_{12}/\Lambda, \quad P_f = 1 - \mathcal{R} = (\lambda_1 + \lambda_{12})/\Lambda.$$

Une densité ordinaire donne une masse nulle à une ligne. Ici la diagonale porte une masse positive : intégrer seulement la partie à densité omettrait $\lambda_{12}/\Lambda$ dans le risque avec égalité.

### Question 4 — Faire varier le paramètre en indiquant ce qui change

À $\lambda_1, \lambda_2$ fixés,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_{12}} = -\frac{\lambda_2}{\Lambda^2} < 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda_{12}}\mathbb{P}(R = S) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\Lambda^2} > 0.$$

Cependant $\mathbb{E}[R] = 1/(\lambda_1 + \lambda_{12})$ et $\mathbb{E}[S] = 1/(\lambda_2 + \lambda_{12})$ diminuent également. On ne compare donc pas seulement deux dépendances à marginales identiques. Lorsque $\lambda_{12} \to 0$, la fiabilité tend vers $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$

et la masse d'égalité tend vers zéro. Lorsque $\lambda_{12} \to \infty$, la fiabilité tend vers zéro et la masse d'égalité vers un : le critère qui classe l'égalité en défaillance devient décisif. Pour une application physique, il faut justifier les marginales exponentielles, le mécanisme produisant des égalités exactes et la convention de défaillance. Les taux doivent avoir l'inverse de l'unité de $R, S$ pour que les exposants soient sans dimension ; les variables auxiliaires ne sont pas nécessairement ici des temps physiques.

**Interprétation mécanique**

L'exercice apprend à repérer une composante commune susceptible de faire coïncider résistance et sollicitation. Le choix de compter l'égalité comme rupture devient alors déterminant. Avant d'utiliser ce modèle pour un matériau, il faut expliquer cette coïncidence et distinguer l'effet de dépendance du changement simultané des distributions de capacité et de charge.

## Exercice 7 De la charge aux moments

**Données.** Poutre simplement appuyée : $\ell = 1000$ mm, forces $Y_1, Y_2$ à 300 et 600 mm, positives vers le bas ; réactions positives vers le haut. Le moment positif met la fibre inférieure en traction. On a $W = 1800$ mm$^3$, $\sigma_a = 250$ MPa,

$$\boldsymbol{m} = (800, 400)^{\mathsf{T}} \text{ N}, \quad V = 10^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ N}^2, \quad C = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ N}.$$

### Question 1 — Retrouver les coefficients d'influence

L'équilibre vertical impose $R_A + R_B = Y_1 + Y_2$. Le moment des forces autour de $A$ donne $1000 R_B = 300 Y_1 + 600 Y_2$. On divise par la longueur puis on substitue dans le premier bilan :

$$R_B = 0{,}3 Y_1 + 0{,}6 Y_2, \qquad R_A = Y_1 + Y_2 - R_B = 0{,}7 Y_1 + 0{,}4 Y_2.$$

Pour une coupe à 300 mm, la force $Y_1$ a un bras nul. À 600 mm, elle agit avec un bras de 300 mm ; la force $Y_2$ a alors un bras nul. Donc

$$M_1 = 300 R_A = 210 Y_1 + 120 Y_2, \qquad M_2 = 600 R_A - 300 Y_1 = 120 Y_1 + 240 Y_2.$$

Chaque colonne de $A = \left(\begin{smallmatrix} 210 & 120 \\ 120 & 240 \end{smallmatrix}\right)$ est la réponse aux deux sections pour une charge unitaire appliquée seule.

### Question 2 — Vérifier Cholesky et normaliser la covariance

$$CC^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 0 & 50/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 5000 \\ 5000 & 2500 + 2500/3 \end{pmatrix} = V.$$

La corrélation est

$$\rho = \frac{V_{12}}{\sqrt{V_{11}}\sqrt{V_{22}}} = \frac{5000}{100(100/\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}8660.$$

Le nombre $1/2$ figurant dans $V/100^2$ n'est pas une corrélation, car les deux variances de cette matrice ne valent pas un.

### Question 3 — Développer les trois entrées de covariance

La linéarité donne $\mathbb{E}[M_1] = 210(800) + 120(400) = 216000$ N mm et $\mathbb{E}[M_2] = 120(800) + 240(400) =$

192000 N mm. En unités (N mm)$^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(M_1) &= 210^2(10000) + 120^2(10000/3) + 2(210)(120)(5000)\\ &= (441+48+252)10^6 = 741\times 10^6,\\ \mathrm{Var}(M_2) &= 120^2(10000) + 240^2(10000/3) + 2(120)(240)(5000)\\ &= (144+192+288)10^6 = 624\times 10^6,\\ \mathrm{Cov}(M_1,M_2) &= 210(120)(10000) + 120(240)(10000/3)\\ &\quad + [210(240)+120(120)]5000\\ &= (252+96+324)10^6 = 672\times 10^6.\end{aligned}$$

Les écarts-types sont $27221{,}3152$ et $24979{,}9920$ N mm. En regroupant les résultats,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{M}] = \begin{pmatrix}216000\\192000\end{pmatrix}\ \mathrm{N\,mm}, \qquad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{M}) = 10^6\begin{pmatrix}741 & 672\\672 & 624\end{pmatrix}\ (\mathrm{N\,mm})^2.$$

La symétrie de $AVA^{\mathsf{T}}$ et sa positivité fournissent deux contrôles.

### Question 4 — Écrire un estimateur de rupture reproductible

Pour $a = 1,\dots,N$, tirer $\boldsymbol{Z}^{(a)} \sim \mathcal{N}_2(0,I)$ indépendamment, former $\boldsymbol{Y}^{(a)} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{Z}^{(a)}$, puis $\boldsymbol{M}^{(a)} = A\boldsymbol{Y}^{(a)}$. Calculer

$$I_a = \mathbf{1}_{\{\max(|M_1^{(a)}|,|M_2^{(a)}|)\ge W\sigma_a\}}, \quad K = \sum_{a=1}^{N} I_a, \quad \widehat{P}_f = K/N.$$

Une approximation de l'erreur standard est $\sqrt{\widehat{P}_f(1-\widehat{P}_f)/N}$ quand $K$ et $N-K$ sont assez grands. Si $K=0$, utiliser une borne binomiale, pas un intervalle de largeur nulle. Pour tracer un profil, conserver le même couple de charges et évaluer $M(x) = R_A x - Y_1(x-300)_+ - Y_2(x-600)_+$ à toutes les abscisses, où $a_+ = \max(a,0)$. Le maximum de la valeur absolue d'une fonction affine par morceaux est atteint à un sommet : les deux moments aux charges, avec les moments nuls aux appuis, suffisent pour tester la rupture.

> **Interprétation mécanique**
> La matrice de covariance des charges est transportée par les bras de levier : elle devient une covariance des moments, puis des contraintes. Les termes croisés sont ici positifs et renforcent la dispersion. Tirer de nouvelles charges à chaque section détruirait la cohérence d'un même état de chargement sur la poutre.

## Exercice 8 Rupture rare et estimation

**Données.** Les forces de la poutre sont gaussiennes de moyenne $(800,400)^{\mathsf{T}}$ N et de covariance $V = 10^4\left(\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\1/2 & 1/3\end{smallmatrix}\right)$ N$^2$. Les moments vérifient $\boldsymbol{M} = A\boldsymbol{Y}$, où $A = \left(\begin{smallmatrix}210 & 120\\120 & 240\end{smallmatrix}\right)$ mm, et $W = 1800$ mm$^3$. On étudie la rupture si l'une des valeurs $|M_i|/W$ atteint le seuil.

### Question 1 — Calculer les risques marginaux et encadrer leur union

Posons $E_i = \{|M_i| \ge a\}$, $a = W\sigma_a$, $m_1 = 216000$, $m_2 = 192000$, $s_1 = \sqrt{741\times 10^6}$, $s_2 = \sqrt{624\times 10^6}$. Par standardisation,

$$p_i = \mathbb{P}(E_i) = \Phi\left(\frac{-a-m_i}{s_i}\right) + \overline{\Phi}\left(\frac{a-m_i}{s_i}\right), \qquad \overline{\Phi}(z) = 1-\Phi(z).$$

Puisque $E_i \subset E_1 \cup E_2$, la borne inférieure est $\max(p_1,p_2)$. L'identité $\mathbb{P}(E_1\cup E_2) = p_1 + p_2 - \mathbb{P}(E_1\cap E_2)$ donne la borne supérieure $\min(1, p_1+p_2)$. Aucune indépendance n'est utilisée.

| Seuil | 250 MPa | 140 MPa |
|---|---|---|
| $a$ (N mm) | 450000 | 252000 |
| $p_1$ | $4{,}11978536\,10^{-18}$ | 0,0930020 |
| $p_2$ | $2{,}62505451\,10^{-25}$ | 0,00815459 |

D'où, à 250 MPa, en arrondissant les bornes vers l'extérieur, $4{,}11978535\,10^{-18} \le P_f \le 4{,}11978563\,10^{-18}$, et, à 140 MPa, $0{,}0930020 \le P_f \le 0{,}1011566$. Pour calculer une queue extrême, utiliser directement une fonction de survie normale : la soustraction $1-\Phi(z)$ peut être arrondie à zéro.

### Question 2 — Dimensionner le nombre de simulations

Pour des essais indépendants de même probabilité de rupture, le nombre $K$ d'échecs a pour espérance $NP_f$. Imposer $\mathbb{E}[K]=1$ donne

$$N = 1/P_f \simeq 2{,}43 \times 10^{17}.$$

Même à cet effectif, $\mathbb{P}(K=0) = (1-P_f)^N \simeq e^{-1} \simeq 0{,}368$. Le temps d'attente, compté en essais jusqu'au premier échec, suit aussi une loi géométrique d'espérance $1/P_f$. Les deux lectures donnent donc le même ordre de grandeur. L'erreur relative standard est environ $1/\sqrt{NP_f}$ pour un événement rare : une seule rupture attendue correspond donc encore à une erreur relative d'ordre un.

### Question 3 — Enlever seulement la covariance des charges

Les marginales restent les mêmes, mais le terme $2(210)(120)\,\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$ disparaît de $\mathrm{Var}(M_1)$. En effet, pour une combinaison $aY_1+bY_2$,

$$\mathrm{Var}(aY_1+bY_2) = a^2\,\mathrm{Var}(Y_1) + b^2\,\mathrm{Var}(Y_2) + 2ab\,\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2).$$

Une somme de charges n'a donc pas une loi fixée par les seules lois marginales des entrées. Ici les réponses restent gaussiennes ; leurs variances changent, donc leurs lois marginales changent aussi. Les matrices de covariance des moments deviennent

$$S_{\mathrm{corr}} = 10^6 \begin{pmatrix} 741 & 672 \\ 672 & 624 \end{pmatrix}, \qquad S_{\mathrm{ind}} = 10^6 \begin{pmatrix} 489 & 348 \\ 348 & 336 \end{pmatrix}.$$

Les moments restent dépendants même lorsque les charges sont indépendantes, car chacun contient $Y_1$ et $Y_2$. Leur moyenne ne change pas.

### Question 4 — Comparer les estimations et leurs intervalles normaux

- **Compter les ruptures dans chaque scénario.**

L'énoncé fournit $N = 20000$ tirages par scénario, $K_c = 1859$ ruptures avec corrélation et $K_i = 1029$ sans corrélation. Les fréquences sont

$$\widehat{p}_c = \frac{1859}{20000} = 0{,}09295, \qquad \widehat{p}_i = \frac{1029}{20000} = 0{,}05145.$$

Pour des indicatrices indépendantes de même probabilité $p$, $\mathrm{Var}(K/N) = p(1-p)/N$. Le remplacement de $p$ par la fréquence observée donne l'erreur standard estimée.

- **Construire les deux intervalles demandés.**

Pour chaque scénario, l'intervalle normal approché à 95 % est $\widehat{p} \pm 1{,}96\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/N}$. Les calculs donnent

$$\widehat{\mathrm{se}}_c = \sqrt{0{,}09295(0{,}90705)/20000} = 0{,}00205317,$$
$$\widehat{\mathrm{se}}_i = \sqrt{0{,}05145(0{,}94855)/20000} = 0{,}00156210.$$

Ainsi,

$$\boxed{I_c \simeq [0{,}088926;\, 0{,}096974]}, \qquad \boxed{I_i \simeq [0{,}048388;\, 0{,}054512]}.$$

Cela correspond à environ $[8{,}893;\, 9{,}697]$ % et $[4{,}839;\, 5{,}451]$ %. Dans chaque échantillon, le nombre de ruptures et celui de non-ruptures dépassent largement les faibles effectifs pour lesquels l'approximation normale devient fragile. Ces intervalles portent sur les probabilités, pas sur les contraintes individuelles.

- **Interpréter la différence sans oublier les hypothèses.**

L'écart observé est $0{,}09295 - 0{,}05145 = 0{,}04150$, soit 4,15 points de pourcentage. Les deux intervalles sont nettement séparés. Si les deux échantillons sont en outre indépendants l'un de l'autre, l'erreur standard de la différence vaut

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}_c(1-\widehat{p}_c)}{20000} + \frac{\widehat{p}_i(1-\widehat{p}_i)}{20000}} \simeq 0{,}002580.$$

L'écart représente alors environ 16 erreurs standard. Si les scénarios réutilisent des tirages communs, cette dernière formule doit inclure leur covariance ; les deux intervalles individuels restent ceux calculés ci-dessus. Les valeurs fournies sont des fréquences simulées, non des probabilités exactes.

**Interprétation mécanique**

À 140 MPa, des charges élevées concomitantes renforcent la flexion et augmentent ici la fréquence de dépassement. À 250 MPa, le risque prédit par le modèle gaussien est si petit que Monte-Carlo direct est inadapté. Cette extrême rareté rend aussi la validité des queues du modèle de charge cruciale : une estimation précise sous un modèle ne valide pas ce modèle physique.

## Exercice 9 Deux réalisations ne suffisent pas à conclure

**Données.** Les deux couples uniformes sont $(0{,}92, 0{,}32)$ et $(0{,}35, 0{,}79)$. Pour chaque couple de normales obtenu par Box–Muller, les forces vérifient $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{m} + C\boldsymbol{z}$, avec $\boldsymbol{m} = (800, 400)^{\mathsf{T}}$ N et $C = \left(\begin{smallmatrix} 100 & 0 \\ 50 & 50/\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)$ N. Les deux forces agissent à 300 et 600 mm d'une poutre simplement appuyée de longueur 1000 mm ; $W = 1800$ mm$^3$ et le seuil est 250 MPa.

### Question 1 — Chaîne de calcul uniforme, normale, charge, moment, contrainte

La transformation utilise $r_j = \sqrt{-2\log a_j}$ et $\theta_j = 2\pi b_j$, puis $z_1 = r_j\cos\theta_j$ et $z_2 = r_j\sin\theta_j$. Les valeurs intermédiaires sont

| Paire | $r_j$ | $\theta_j$ (radians) |
|---|---|---|
| $(0{,}92; 0{,}32)$ | $0{,}4083665$ | $2{,}0106193$ |
| $(0{,}35; 0{,}79)$ | $1{,}4490149$ | $4{,}9637164$ |

On obtient $(z_1, z_2) = (-0{,}173874, 0{,}369501)$ pour le premier couple et $(0{,}360355, -1{,}403491)$ pour le second. Les charges se calculent avec

$$Y_1 = 800 + 100z_1, \qquad Y_2 = 400 + 50z_1 + 28{,}86751346z_2.$$

Elles valent $(782{,}6126, 401{,}9729)$ N puis $(836{,}0355, 377{,}5025)$ N. Pour chaque ligne, appliquer

$$M_1 = 210Y_1 + 120Y_2, \qquad M_2 = 120Y_1 + 240Y_2, \qquad \sigma_{\max} = \frac{\max(|M_1|, |M_2|)}{1800}.$$

Pour le second tirage, par exemple, $M_1 = 210(836{,}0355) + 120(377{,}5025) \simeq 220867{,}76$ N mm. Les résultats des deux essais sont

| Essai | $M_1$ (N mm) | $M_2$ (N mm) | $\sigma_{\max}$ (MPa) |
|---|---|---|---|
| 1 | 212585,39 | 190387,00 | 118,103 |
| 2 | 220867,76 | 190924,85 | 122,704 |

### Question 2 — Compter les états sûrs

Les deux contraintes sont inférieures à 250 MPa. La fréquence de sûreté est $\widehat{\mathcal{R}} = (1+1)/2 = 1$, tandis que $\widehat{P}_f = (0+0)/2 = 0$. Les nombres fournis sont un exemple de calcul, pas une preuve expérimentale que tous les chargements futurs sont sûrs.

### Question 3 — Quantifier l'information réellement disponible

Pour des tirages indépendants de probabilité de rupture $p$, $\mathbb{P}(K=0)=(1-p)^2$. En inversant au niveau 5 %,

$$(1-p_{\text{sup}})^2=0{,}05 \Longrightarrow 1-p_{\text{sup}}=\sqrt{0{,}05} \Longrightarrow p_{\text{sup}}=0{,}776393.$$

L'intervalle unilatéral issu de cette observation est donc $[0;0{,}776393]$. Par exemple, même si $p=0{,}1$, la probabilité d'observer deux essais sans rupture serait $0{,}9^2=0{,}81$. L'observation n'a donc rien d'exceptionnel.

> **Interprétation mécanique**
>
> Ces deux réalisations permettent de vérifier les unités, la transformation de Cholesky et le critère de résistance. Elles ne permettent pas de certifier un dimensionnement probabiliste. La précision nécessaire se fixe à partir de la probabilité de rupture admissible, puis détermine le nombre d'essais et la méthode d'estimation.