4

MT23 – Algèbre linéaire • Chapitre 4

Valeurs propres – Vecteurs propres

Mokhtar Z. Alaya

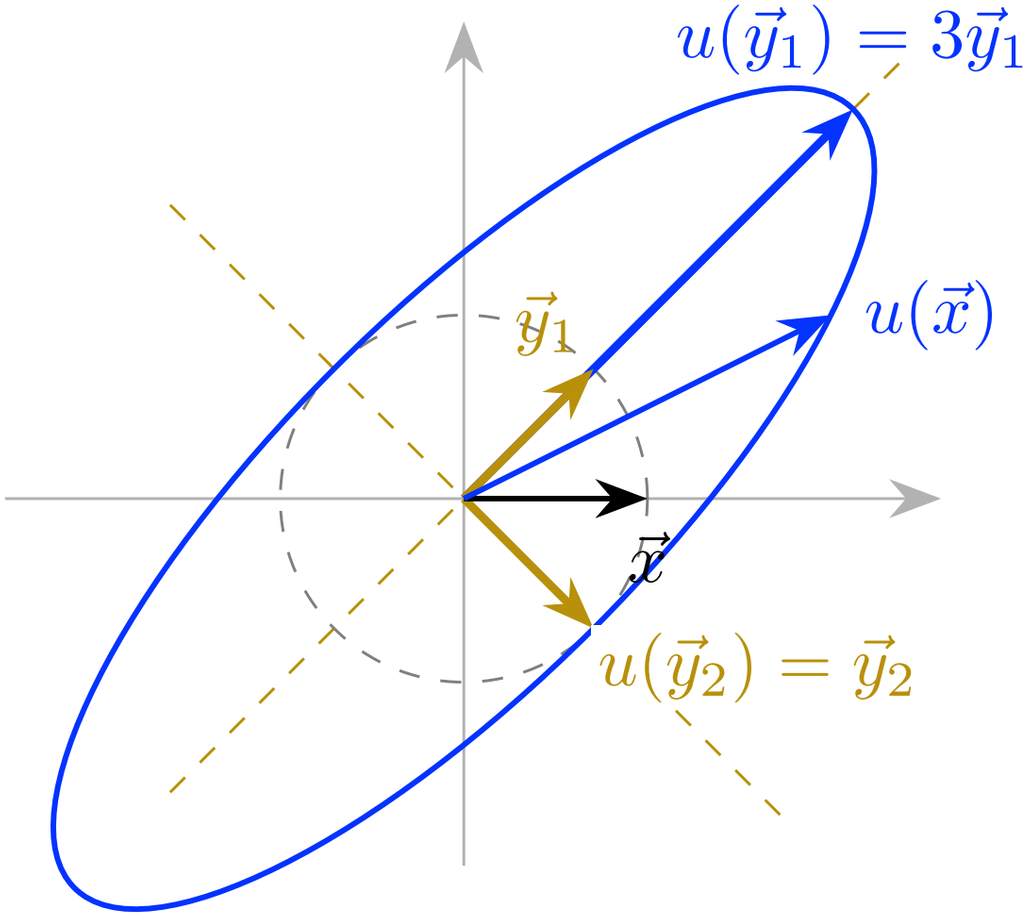
http://mzalaya.github.io/files/teaching/utseus/mt23/chap4.pdf

Université de Shanghai, UTSEUS

4 Motivations

- Trouver une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est la plus simple possible : diagonale ou triangulaire (diagonalisation, trigonalisation).
- L'outil : les valeurs propres et les vecteurs propres. Applications : puissances d'une matrice, suites récurrentes linéaires.

4 Intuition : des directions conservées



En général, une application linéaire change la direction des vecteurs : $\vec{x}$ et $u(\vec{x})$ ne sont pas colinéaires.
Un vecteur propre est un vecteur non nul dont la direction est conservée :

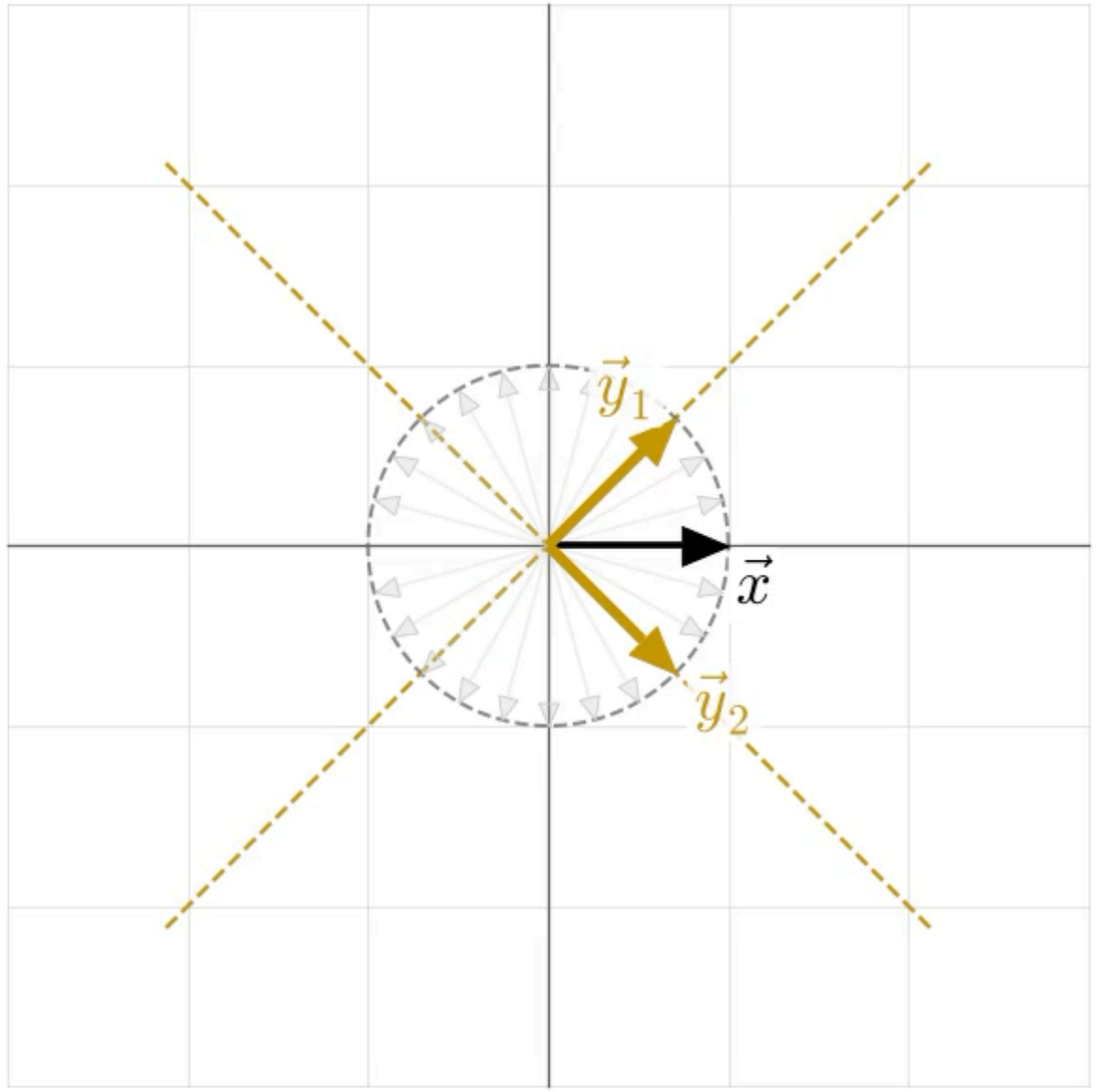
$$u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}.$$

La valeur propre λ est le facteur d'étirement dans cette direction ($\lambda < 0$: changement de sens, $\lambda = 0$: écrasement).

Exemple. u de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $u(\vec{y}_1) = 3\,\vec{y}_1$ pour $\vec{y}_1$ dirigé par $(1, 1)$, et $u(\vec{y}_2) = \vec{y}_2$ pour $\vec{y}_2$ dirigé par $(1, -1)$. Le cercle unité (pointillé) est envoyé sur l'ellipse bleue, dont les axes sont portés par les vecteurs propres.

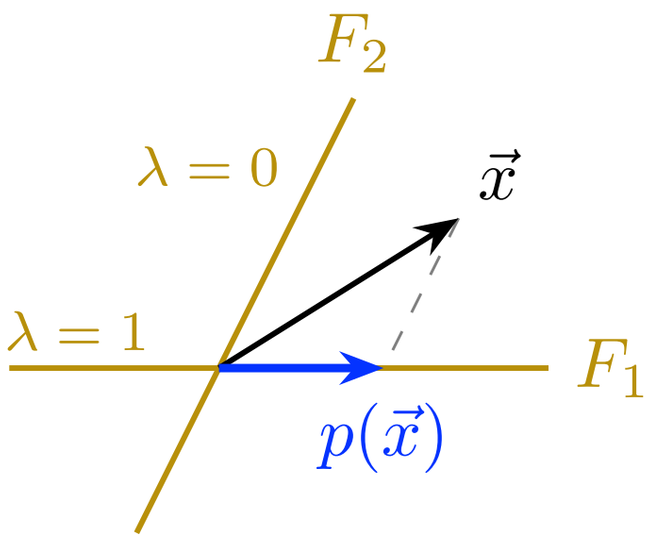
Intuition : des directions conservées (animation)

En général, une application linéaire **change la direction** des vecteurs, sauf sur les **directions propres** : $u(\vec{y}) = \lambda\,\vec{y}$.

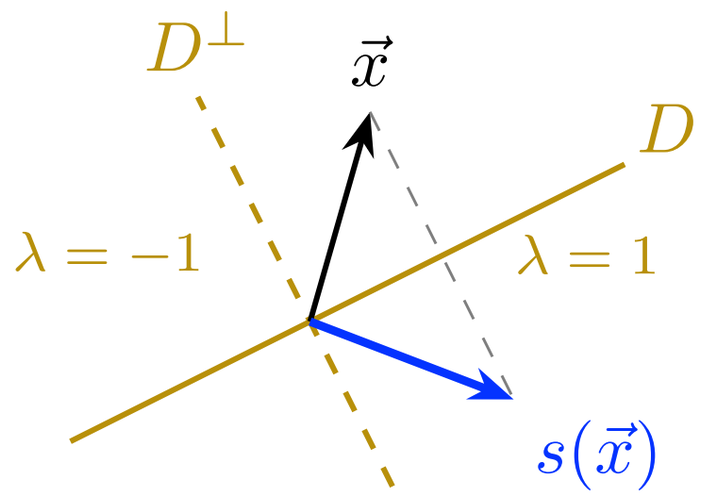


$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}_1 = (1,1) : \lambda_1 = 3 \qquad \vec{y}_2 = (1,-1) : \lambda_2 = 1 \qquad \vec{x} = (1,0) \;\mapsto\; u(\vec{x}) = (2,1)$$

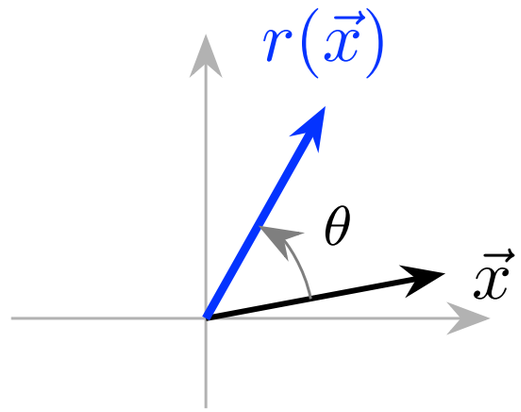
Intuition : trois exemples dans le plan



Projection sur F_1 parallèlement à F_2 : $\lambda = 1$ sur F_1, $\lambda = 0$ sur F_2.



Symétrie orthogonale par rapport à D : $\lambda = 1$ sur D, $\lambda = -1$ sur $D^\perp$.

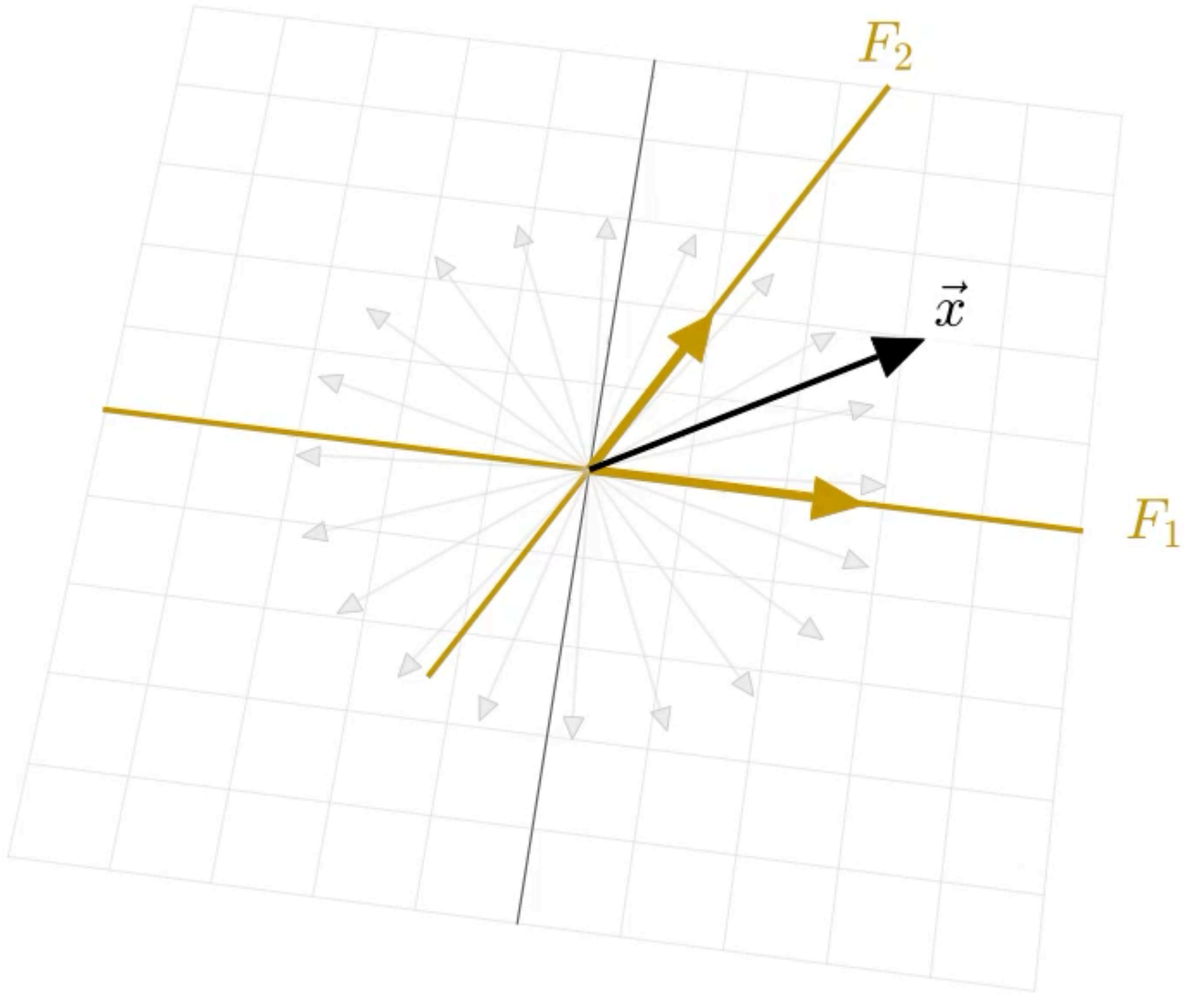


Rotation d'angle $\theta \neq k\pi$: aucune direction conservée, pas de valeur propre réelle.

Sur chaque direction conservée, l'application agit comme la multiplication par la valeur propre λ. La projection est l'exemple du § 4.1.1, la rotation celui de l'exemple B.1.2 (valeurs propres complexes $e^{\pm i\theta}$).

Intuition : trois exemples dans le plan (animation)

1. Projection p sur F_1 parallèlement à F_2 : $\lambda = 1$ sur F_1, $\lambda = 0$ sur F_2.



Chaque vecteur glisse parallèlement à F_2 jusqu'à F_1 (exemple du § 4.1.1).

4

Valeurs propres - Vecteurs propres

4.1 Vecteurs propres - Valeurs propres

4.2 Matrices à coefficients complexes

4.3 Sous-espace propre

4.4 Réduction d’une matrice

4.5 Compléments

4.1

Vecteurs propres - Valeurs propres

4.1.1 Valeur et vecteur propres d’un endomorphisme

4.1.2 Valeur et vecteur propres d’une matrice

4.1.3 Lien entre valeurs propres d’une matrice et d’un endomorphisme

4.1.4 Polynôme caractéristique

4.1.5 Valeurs propres et matrices particulières

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

> **Remarque.** Quand E est réduit à $\{\vec{0}\}$, u est l'application nulle et il n'y a rien à faire. On se placera dorénavant dans le cas où $\dim E \geq 1$.

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

> **Remarque.** Quand E est réduit à $\{\vec{0}\}$, u est l'application nulle et il n'y a rien à faire. On se placera dorénavant dans le cas où $\dim E \geq 1$.

Définition 4.1.1

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $\vec{y}$ non nul dans E tel que

$$u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}. \tag{4.1.1}$$

$\vec{y}$ est appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

⚠ **Attention !** Il est fondamental de préciser "$\vec{y}$ non nul". En effet :

- quand $\vec{y} = \vec{0}$, on a $u(\vec{y}) = \vec{0}$;
- de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{y} = \vec{0}$ donc $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}\ (= \vec{0})$;
- donc tout scalaire de $\mathbb{K}$ serait valeur propre de u.

⚠ **Attention !** Il est fondamental de préciser "$\vec{y}$ non nul". En effet :

- quand $\vec{y} = \vec{0}$, on a $u(\vec{y}) = \vec{0}$;
- de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{y} = \vec{0}$ donc $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}\ (= \vec{0})$;
- donc tout scalaire de $\mathbb{K}$ serait valeur propre de u.

Exemple. Soit $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont différents de $\{\vec{0}\}$. On définit l'endomorphisme p comme la projection sur F_1 parallèlement à F_2, alors

$$\forall \vec{x}_1 \in F_1,\ p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 = 1\,\vec{x}_1, \qquad \forall \vec{x}_2 \in F_2,\ p(\vec{x}_2) = \vec{0} = 0\,\vec{x}_2.$$

On a donc

- 1 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre ;
- 0 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_2 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

⚠ **Attention !** Il est fondamental de préciser "$\vec{y}$ non nul". En effet :

- quand $\vec{y} = \vec{0}$, on a $u(\vec{y}) = \vec{0}$;
- de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{y} = \vec{0}$ donc $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}\ (= \vec{0})$;
- donc tout scalaire de $\mathbb{K}$ serait valeur propre de u.

Exemple. Soit $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont différents de $\{\vec{0}\}$. On définit l'endomorphisme p comme la projection sur F_1 parallèlement à F_2, alors

$$\forall \vec{x}_1 \in F_1,\ p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 = 1\,\vec{x}_1, \qquad \forall \vec{x}_2 \in F_2,\ p(\vec{x}_2) = \vec{0} = 0\,\vec{x}_2.$$

On a donc

- 1 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre ;
- 0 est valeur propre de p et tout vecteur non nul de F_2 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Exemple (B.1.1). Soit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ non injective. Alors $\operatorname{Ker} u \neq \{\vec{0}\}$ et donc il existe un vecteur $\vec{y}$ non nul tel que $u(\vec{y}) = \vec{0} = 0\,\vec{y}$. Donc 0 est valeur propre et tous les vecteurs non nuls du noyau sont vecteurs propres associés à la valeur propre nulle.

Valeur et vecteur propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 1$.

Valeur et vecteur propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 1$.

Définition 4.1.2

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tel que

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad Y \neq 0. \tag{4.1.2}$$

On dit que Y est un vecteur propre associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.

Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 1$.

Définition 4.1.2

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tel que

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad Y \neq 0. \tag{4.1.2}$$

On dit que Y est un vecteur propre associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.

Remarque. Montrer en exercice que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\alpha \neq 0$, alors αY est également vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : les vecteurs propres ne sont pas uniques.

4.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 1$.

Définition 4.1.2

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tel que

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad Y \neq 0. \tag{4.1.2}$$

On dit que Y est un vecteur propre associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.

Remarque. Montrer en exercice que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\alpha \neq 0$, alors αY est également vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : les vecteurs propres ne sont pas uniques.

Preuve. (au tableau).

Exemple. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on cherche les valeurs propres λ et les vecteurs propres Y de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

La condition (4.1.2) s'écrit $y_1 = \lambda y_1$, $y_2 = \lambda y_2$, $0 = \lambda y_3$, c'est-à-dire $(1-\lambda)y_1 = 0$, $(1-\lambda)y_2 = 0$, $\lambda y_3 = 0$:

- si $\lambda \notin \{0, 1\}$: $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, donc $Y = 0$ et λ n'est pas valeur propre ;
- si $\lambda = 1$: $y_3 = 0$, y_1 et y_2 quelconques ;
- si $\lambda = 0$: $y_1 = y_2 = 0$, y_3 quelconque.

Exemple. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on cherche les valeurs propres λ et les vecteurs propres Y de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

La condition (4.1.2) s'écrit $y_1 = \lambda y_1$, $y_2 = \lambda y_2$, $0 = \lambda y_3$, c'est-à-dire $(1-\lambda)y_1 = 0$, $(1-\lambda)y_2 = 0$, $\lambda y_3 = 0$:

- si $\lambda \notin \{0, 1\}$: $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, donc $Y = 0$ et λ n'est pas valeur propre ;
- si $\lambda = 1$: $y_3 = 0$, y_1 et y_2 quelconques ;
- si $\lambda = 0$: $y_1 = y_2 = 0$, y_3 quelconque.

On a donc deux familles de couples propres

- $\lambda_1 = 1$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels quelconques,
- $\lambda_2 = 0$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$, où γ est un réel quelconque.

Pour que Y_1 et Y_2 soient vecteurs propres, donc non nuls, il faut de plus $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\gamma \neq 0$.

Valeur et vecteur propres d'une matrice

On peut montrer en exercice que les résultats constatés sur l'exemple précédent se généralisent :

- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\iff$ 0 est valeur propre de A.

4.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

On peut montrer en exercice que les résultats constatés sur l'exemple précédent se généralisent :

- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\iff$ 0 est valeur propre de A.

Preuve. (au tableau).

On peut montrer en exercice que les résultats constatés sur l'exemple précédent se généralisent :

- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\iff$ 0 est valeur propre de A.

Preuve. (au tableau).

Depuis le début du cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si les termes de A sont réels, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut :

- considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{R}$,
- ou considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

Lorsque l'on ne précise pas, si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on étudiera les valeurs et vecteurs propres réels de A.

Propriété

Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors $A^k Y = \lambda^k Y$ pour tout entier $k \geq 0$. Plus généralement, pour tout polynôme $Q(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_d s^d$, si l'on pose $Q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_d A^d$, alors

$$Q(A)\, Y = Q(\lambda)\, Y.$$

Propriété

Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors $A^k Y = \lambda^k Y$ pour tout entier $k \geq 0$. Plus généralement, pour tout polynôme $Q(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_d s^d$, si l'on pose $Q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_d A^d$, alors

$$Q(A)\, Y = Q(\lambda)\, Y.$$

Preuve. (au tableau).

Propriété

Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors $A^k Y = \lambda^k Y$ pour tout entier $k \geq 0$. Plus généralement, pour tout polynôme $Q(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_d s^d$, si l'on pose $Q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_d A^d$, alors

$$Q(A)\, Y = Q(\lambda)\, Y.$$

Preuve. (au tableau).

Exemple. Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors (λ^2, Y) est un couple propre de A^2 et $(\lambda + \alpha, Y)$ est un couple propre de $A + \alpha I$ (cf. Exercice A.2.3).

Propriété

Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors $A^k Y = \lambda^k Y$ pour tout entier $k \geq 0$. Plus généralement, pour tout polynôme $Q(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_d s^d$, si l'on pose $Q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_d A^d$, alors

$$Q(A)\, Y = Q(\lambda)\, Y.$$

Preuve. (au tableau).

Exemple. Si (λ, Y) est un couple propre de A, alors (λ^2, Y) est un couple propre de A^2 et $(\lambda + \alpha, Y)$ est un couple propre de $A + \alpha I$ (cf. Exercice A.2.3).

Exemple. La matrice de projection $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = A$. Si $AY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$, alors $\lambda^2 Y = A^2 Y = AY = \lambda Y$, donc $\lambda^2 = \lambda$, soit $\lambda \in \{0, 1\}$: on retrouve les valeurs propres de l'exemple précédent.

Exemple (B.1.2) : valeurs propres de la rotation dans le plan. Soit A la matrice de la rotation plane

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour que $(\lambda, Y) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}$ soit un couple propre, on doit avoir

$$\begin{cases} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta = \lambda y_1, \\ y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta = \lambda y_2, \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} y_1(\cos\theta - \lambda) - y_2 \sin\theta = 0, \\ y_1 \sin\theta + y_2(\cos\theta - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Si le déterminant de ce système est non nul, la seule solution est $y_1 = y_2 = 0$. Donc pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul, ce qui conduit à

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0.$$

On va donc étudier deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On va donc étudier deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on cherche λ dans $\mathbb{R}$. Une somme de deux carrés de réels est nulle si et seulement si les deux carrés sont nuls : il faut $\sin\theta = 0$ et $\lambda = \cos\theta$. Dans ce cas, si $\sin\theta \neq 0$, il n'y a pas de valeurs propres réelles (donc pas de vecteurs propres réels). Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = 1$, et y_1, y_2 quelconques. Si $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = -1$, et y_1, y_2 quelconques. On retrouve bien le résultat intuitif que l'on avait trouvé dans l'Exercice A.1.2 :
  - si $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il n'y a pas de vecteurs propres réels,
  - si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors l'identité, donc tout vecteur non nul est propre et 1 est valeur propre,
  - si $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors la symétrie, donc tout vecteur non nul est propre et -1 est valeur propre.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $(\cos\theta - \lambda)^2 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2 \iff \cos\theta - \lambda = \pm i\sin\theta$, on obtient donc 2 valeurs propres complexes possibles :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \ (= e^{i\theta}), \\ \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta \ (= e^{-i\theta}). \end{cases}$$

Pour λ_1 (avec $\sin\theta \neq 0$), la première équation du système s'écrit $-i\sin\theta\, y_1 - \sin\theta\, y_2 = 0$, soit $y_2 = -i\, y_1$; de même, pour λ_2 : $y_2 = i\, y_1$. Les vecteurs propres correspondants sont :

- $\lambda_1 = e^{i\theta} : Y_1 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{C},$
- $\lambda_2 = e^{-i\theta} : Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{C}.$

4.1.3 Lien entre valeurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme

On vient de définir de façon indépendante les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E;E)$ puis les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A. Si A est une matrice associée à l'endomorphisme u, y a-t-il une relation entre les valeurs propres et vecteurs propres de l'une et les valeurs propres et vecteurs propres de l'autre ?

4.1.3 Lien entre valeurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme

On vient de définir de façon indépendante les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E;E)$ puis les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A. Si A est une matrice associée à l'endomorphisme u, y a-t-il une relation entre les valeurs propres et vecteurs propres de l'une et les valeurs propres et vecteurs propres de l'autre ?

Proposition 4.1.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, soit $u \in \mathcal{L}(E;E)$ et soit $(\lambda, \vec{y})$ un couple propre de u : $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$. Alors

- si A est la matrice associée à u quand on munit E de la base $\mathcal{E}$,
- si Y est le vecteur colonne contenant les composantes de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{E}$,

alors on a : $AY = \lambda Y$ et $Y \neq 0$. Donc (λ, Y) est un couple propre de A.

4.1.3 Lien entre valeurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme

On vient de définir de façon indépendante les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E;E)$ puis les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A. Si A est une matrice associée à l'endomorphisme u, y a-t-il une relation entre les valeurs propres et vecteurs propres de l'une et les valeurs propres et vecteurs propres de l'autre ?

Proposition 4.1.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, soit $u \in \mathcal{L}(E;E)$ et soit $(\lambda, \vec{y})$ un couple propre de u : $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$. Alors

- si A est la matrice associée à u quand on munit E de la base $\mathcal{E}$,
- si Y est le vecteur colonne contenant les composantes de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{E}$,

alors on a : $AY = \lambda Y$ et $Y \neq 0$. Donc (λ, Y) est un couple propre de A.

Preuve. (au tableau).

Exemple.

- Si E est un espace vectoriel muni d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- si π est le plan vectoriel engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,
- si D est la droite vectorielle engendrée par $(\vec{e}_3)$,
- si u est la projection sur π parallèlement à D,

alors la matrice de u est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(en effet } u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ u(\vec{e}_2) = \vec{e}_2,\ u(\vec{e}_3) = \vec{0}\text{)}.$$

On a calculé les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice dans le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice". On a trouvé

$$\lambda_1 = 1,\ Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 0,\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

4.1.3 Lien entre valeurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme

D'autre part, comme on l'a vu dans l'Exercice A.1.2, les vecteurs du plan sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1 et les vecteurs de la droite sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 0. On retrouve bien les mêmes valeurs propres et la correspondance entre les vecteurs propres de A et u :

- à Y_1 correspond $\vec{y}_1 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$; $\vec{y}_1$ est bien un vecteur du plan π,
- à Y_2 correspond $\vec{y}_2 = \gamma\vec{e}_3$; $\vec{y}_2$ est bien un vecteur de la droite D.

4.1.4 Polynôme caractéristique

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale, on peut définir :

4.1.4 Polynôme caractéristique

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale, on peut définir :

Définition 4.1.3

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

4.1.4 Polynôme caractéristique

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale, on peut définir :

Définition 4.1.3

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisément, il est de la forme :

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n \big(\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n\big),$$

avec

- $\alpha_1 = -\operatorname{Tr}(A)$, où $\operatorname{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ est la trace de A ;
- $\alpha_n = (-1)^n \det(A)$;

autrement dit

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A)\, \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

4.1.4 Polynôme caractéristique

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale, on peut définir :

Définition 4.1.3

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisément, il est de la forme :

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n \big(\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n\big),$$

avec

- $\alpha_1 = -\operatorname{Tr}(A)$, où $\operatorname{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ est la trace de A ;
- $\alpha_n = (-1)^n \det(A)$;

autrement dit

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A)\, \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Remarque. Le polycopié utilise le polynôme $\det(\lambda I - A) = (-1)^n \Pi_A(\lambda)$: les deux polynômes ont les mêmes racines, avec les mêmes multiplicités.

En effet, $A - \lambda I$ est la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} - \lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

En effet, $A - \lambda I$ est la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} - \lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

- **Terme de degré n :** il est clair que le terme de plus haut degré du déterminant de $A - \lambda I$ est $(-\lambda)^n = (-1)^n \lambda^n$: il provient du produit $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ des termes diagonaux.
- **Terme de degré $n - 1$:** pour obtenir un terme en λ^{n-1}, il faut prendre $n - 1$ fois $(-\lambda)$ sur la diagonale ; comme chaque produit du déterminant ne contient qu'un coefficient par ligne et par colonne, le dernier facteur est le terme diagonal restant, dont on prend a_{ii}. Le coefficient de λ^{n-1} est donc $(-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A)$.
- **Terme constant :** par ailleurs

$$\Pi_A(0) = \det(A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha_n = (-1)^n \det(A). \tag{4.1.3}$$

4.1.4 Polynôme caractéristique

Le calcul des valeurs propres se fait à l'aide de la proposition suivante :

4.1.4 Polynôme caractéristique

Le calcul des valeurs propres se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.1.2

Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire :

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \tag{4.1.4}$$

4.1.4 Polynôme caractéristique

Le calcul des valeurs propres se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.1.2

Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire :

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \tag{4.1.4}$$

Preuve. (au tableau).

Polynôme caractéristique

Définition 4.1.4

On dit que λ est une valeur propre de A de multiplicité r si λ est racine de multiplicité r du polynôme caractéristique Π_A.

Définition 4.1.4

On dit que λ est une valeur propre de A de multiplicité r si λ est racine de multiplicité r du polynôme caractéristique Π_A.

Lorsque $r = 1$, on dit que la valeur propre est simple, lorsque $r = 2$, on dit que la valeur propre est double, lorsque $r = 3$, on dit que la valeur propre est triple.

Polynôme caractéristique

Définition 4.1.4

On dit que λ est une valeur propre de A de multiplicité r si λ est racine de multiplicité r du polynôme caractéristique Π_A.

Lorsque $r = 1$, on dit que la valeur propre est simple, lorsque $r = 2$, on dit que la valeur propre est double, lorsque $r = 3$, on dit que la valeur propre est triple.

Pratiquement :

- pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, on calcule le polynôme caractéristique $\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$; ses racines λ_i sont les valeurs propres de la matrice ;
- il est équivalent de chercher les racines du polynôme $\det(\lambda I - A)$. Pourquoi ? *Réponse :*
  $\det(\lambda I - A) = \det\big(-(A - \lambda I)\big) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$;
- la recherche des vecteurs propres se fait en résolvant alors le système $AY_i = \lambda_i Y_i$.

Exemple. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, donc

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

On obtient donc 2 valeurs propres simples réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$.

Exemple. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, donc

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

On obtient donc 2 valeurs propres simples réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$.

Contrôle. Pour $n = 2$, $\Pi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\,\lambda + \det(A)$: ici $\mathrm{Tr}(A) = 5 + 2 = 7 = 1 + 6$ et $\det(A) = 5 \times 2 - 2 \times 2 = 6 = 1 \times 6$ (on le justifiera au § 4.2.2).

On détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_2 = -2y_1 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

- $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = 2y_2 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \beta \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Vérification.

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+2\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Vérification.

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+2\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

On constate sur cet exemple toutes les propriétés qui ont été énoncées : Π_A est un polynôme de degré 2, il existe toujours une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée.

Vérification.

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+2\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

On constate sur cet exemple toutes les propriétés qui ont été énoncées : Π_A est un polynôme de degré 2, il existe toujours une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée.

⚠ Il est IMPOSSIBLE que le calcul de vecteurs propres conduise à la solution unique $y_1 = y_2 = 0$. Si λ est une valeur propre de A, et si les calculs sont corrects, alors on trouve TOUJOURS des vecteurs non nuls solutions de $AY = \lambda Y$.

Valeurs propres et matrices particulières

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Valeurs propres et matrices particulières

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } \overline{A}$$

(avec la même multiplicité).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } A$$

(avec la même multiplicité).

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } \overline{A}$$

(avec la même multiplicité).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } A$$

(avec la même multiplicité).

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } \overline{A}$$

(avec la même multiplicité).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } A$$

(avec la même multiplicité).

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.5

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Proposition 4.1.3

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de A.

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } \overline{A}$$

(avec la même multiplicité).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \overline{\lambda} \text{ valeur propre de } A$$

(avec la même multiplicité).

Preuve. (au tableau).

Proposition 4.1.5

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Preuve. (au tableau).

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

On peut commencer par traiter l'exercice (Exercice A.1.9) avant de voir sa généralisation.

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

On peut commencer par traiter l'exercice (Exercice A.1.9) avant de voir sa généralisation.

Proposition 4.1.6

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

On peut commencer par traiter l'exercice (Exercice A.1.9) avant de voir sa généralisation.

Proposition 4.1.6

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Preuve. (au tableau).

4.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

On peut commencer par traiter l'exercice (Exercice A.1.9) avant de voir sa généralisation.

Proposition 4.1.6

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Preuve. (au tableau).

⚠ **Attention !** Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres mais elles n'ont pas les mêmes vecteurs propres.

Valeurs propres et matrices semblables

En effet, si (λ, Y) est un couple propre de A, alors :

- $AY = \lambda Y$, or $A = PBP^{-1}$, donc

$$PBP^{-1}Y = \lambda Y. \tag{4.1.5}$$

- On multiplie (4.1.5) à gauche par P^{-1}, et on obtient

$$(P^{-1})PBP^{-1}Y = (P^{-1})\lambda Y \iff BP^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y.$$

  Si on pose $Z = P^{-1}Y$, on a $BZ = \lambda Z$.
- De plus, $Y \neq 0$ et P^{-1} inversible, donc $\operatorname{Ker} P^{-1} = \{0\}$ et donc $Y \notin \operatorname{Ker} P^{-1}$, ce qui montre que $Z \neq 0$.

Donc Z est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ (ceci démontre à nouveau que λ est valeur propre de B).

4.2

Matrices à coefficients complexes

4.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

4.2.2 Valeurs propres, trace et déterminant

4.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On étudie le cas le plus général des matrices à coefficients complexes.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc les matrices à coefficients réels sont des matrices à coefficients complexes. Pour ces matrices, on étudiera les valeurs propres et vecteurs propres complexes car, comme on l'a vu, les valeurs propres et vecteurs propres de ces matrices ne sont pas toujours réels (revoir l'exemple B.1.2 de la rotation).

4.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On étudie le cas le plus général des matrices à coefficients complexes.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc les matrices à coefficients réels sont des matrices à coefficients complexes. Pour ces matrices, on étudiera les valeurs propres et vecteurs propres complexes car, comme on l'a vu, les valeurs propres et vecteurs propres de ces matrices ne sont pas toujours réels (revoir l'exemple B.1.2 de la rotation).

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'existence et le nombre de valeurs propres d'une matrice est une conséquence du Théorème de d'Alembert :

4.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On étudie le cas le plus général des matrices à coefficients complexes.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc les matrices à coefficients réels sont des matrices à coefficients complexes. Pour ces matrices, on étudiera les valeurs propres et vecteurs propres complexes car, comme on l'a vu, les valeurs propres et vecteurs propres de ces matrices ne sont pas toujours réels (revoir l'exemple B.1.2 de la rotation).

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'existence et le nombre de valeurs propres d'une matrice est une conséquence du Théorème de d'Alembert :

Théorème de d'Alembert

Un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes admet n racines dans $\mathbb{C}$, chacune de ces racines étant comptée avec sa multiplicité.

Existence et multiplicité des valeurs propres

Le polynôme $\Pi_A(\lambda)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\Pi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{r_i},$$

où

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p racines (dans $\mathbb{C}$) distinctes du polynôme caractéristique ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$),
- r_i est la multiplicité de la racine λ_i.

D'après le Théorème de d'Alembert on a $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ (degré de Π_A). On a donc la proposition suivante :

Existence et multiplicité des valeurs propres

Proposition 4.2.1

Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, si l'on note r_i la multiplicité de λ_i, alors

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

Existence et multiplicité des valeurs propres

Proposition 4.2.1

Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, si l'on note r_i la multiplicité de λ_i, alors

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

Exemple. Rotation (B.1.2) avec $\theta \neq k\pi$:

$$\Pi_A(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = (e^{i\theta} - \lambda)(e^{-i\theta} - \lambda),$$

donc $p = 2$, $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, $r_1 = r_2 = 1$ et $r_1 + r_2 = 2 = n$.

Valeurs propres, trace et déterminant

On va maintenant donner une autre façon de noter les valeurs propres.

Valeurs propres, trace et déterminant

On va maintenant donner une autre façon de noter les valeurs propres.

Prenons un exemple, on suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{C})$ admet 3 valeurs propres distinctes :

- λ_1 valeur propre double, λ_2 valeur propre simple, λ_3 valeur propre de multiplicité 4 ;
- avec les notations précédentes, on a : $n = 7$, $p = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 4$;
- on définit maintenant $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1$, $\mu_3 = \lambda_2$, $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \lambda_3$.

On dit que $(\mu_i)_{i=1,\dots,7}$ sont les 7 valeurs propres distinctes ou confondues de A. On a bien sûr

$$\prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{r_i} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda).$$

On va maintenant donner une autre façon de noter les valeurs propres.

Prenons un exemple, on suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{C})$ admet 3 valeurs propres distinctes :

- λ_1 valeur propre double, λ_2 valeur propre simple, λ_3 valeur propre de multiplicité 4 ;
- avec les notations précédentes, on a : $n = 7$, $p = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 4$;
- on définit maintenant $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1$, $\mu_3 = \lambda_2$, $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \lambda_3$.

On dit que $(\mu_i)_{i=1,\dots,7}$ sont les 7 valeurs propres distinctes ou confondues de A. On a bien sûr

$$\prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{r_i} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda).$$

Avec la notation précédente, la Proposition 4.2.1 peut s'énoncer : une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ admet n valeurs propres complexes distinctes ou confondues $(\mu_i)_{i=1,\dots,n}$.

Valeurs propres, trace et déterminant

La relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines donne la proposition :

La relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines donne la proposition :

Proposition 4.2.2

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont ses valeurs propres complexes (distinctes ou confondues), alors :

- la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

- le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Preuve.

- **Étape 1 (factorisation).**

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)\dots(\mu_n - \lambda). \tag{4.2.1}$$

- **Étape 2 (trace).** Le coefficient de λ^{n-1} dans $\det(A - \lambda I)$ est $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ car, dans le calcul du déterminant, seul le produit des éléments de la diagonale de $A - \lambda I$ donne un terme en λ^{n-1} (§ 4.1.4). D'autre part, le coefficient de λ^{n-1} dans $(\mu_1 - \lambda)\dots(\mu_n - \lambda)$ est $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$, car

$$(\mu_1-\lambda)\cdots(\mu_n-\lambda) = (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\mu_1+\cdots+\mu_n)\,\lambda^{n-1}+\cdots+\mu_1\cdots\mu_n.$$

d'où, en identifiant les coefficients, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

- **Étape 3 (déterminant).** Enfin, d'après (4.1.3), $\Pi_A(0) = \det(A)$ et, d'après (4.2.1), $\Pi_A(0) = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$, ce qui démontre la deuxième propriété. ■

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (partie 1), $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 6$:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 + 6 = 7 = 5 + 2 = \mathrm{Tr}(A),$$
$$\mu_1 \mu_2 = 1 \times 6 = 6 = 5 \times 2 - 2 \times 2 = \det(A).$$

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (partie 1), $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 6$:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 + 6 = 7 = 5 + 2 = \mathrm{Tr}(A),$$
$$\mu_1 \mu_2 = 1 \times 6 = 6 = 5 \times 2 - 2 \times 2 = \det(A).$$

Conséquence. Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. On peut aussi le voir directement : $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$ et, comme $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.

4.3

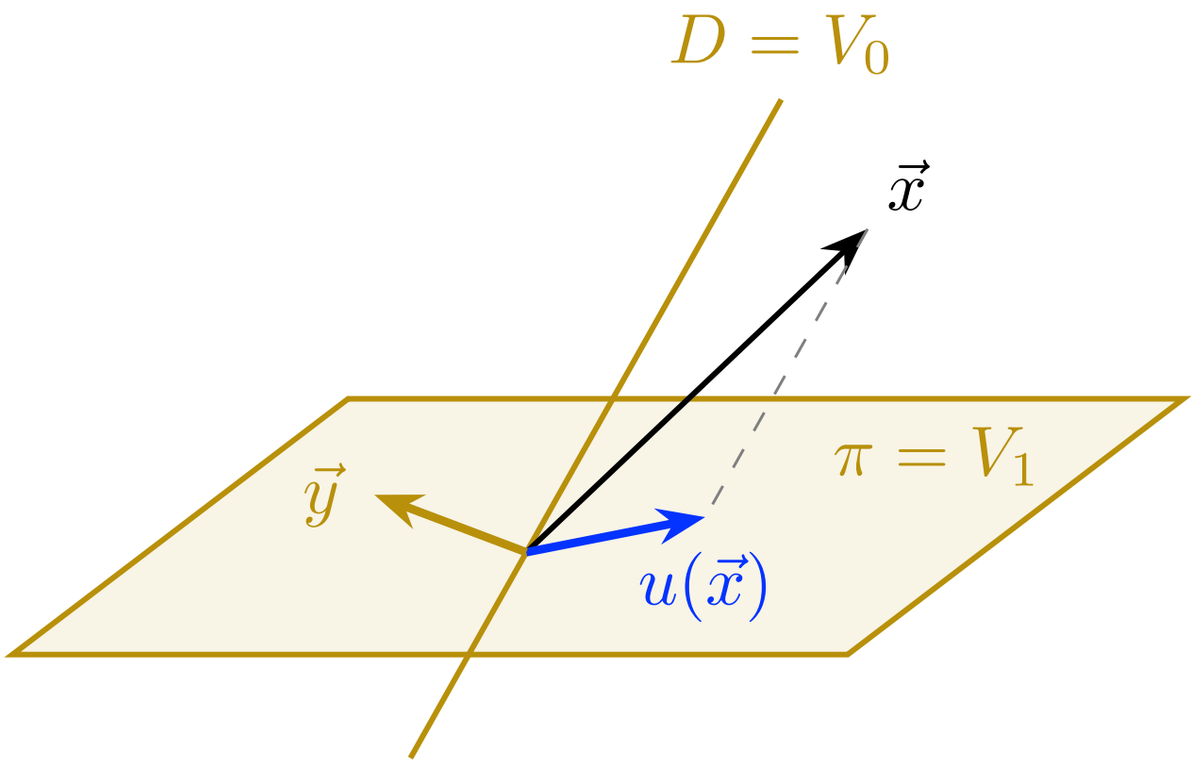
Sous-espace propre

4.3.1 Définition du sous-espace propre

4.3.2 Somme directe des sous espaces propres

4.3.3 Multiplicité d’une valeur propre et dimension du sous espace propre

Intuition : sous-espaces propres



u : projection sur le plan π parallèlement à la droite D (exemple du § 4.1.3).

- Tout vecteur $\vec{y}$ de π est conservé, $u(\vec{y}) = \vec{y}$: $V_1 = \pi$, de dimension 2.
- Tout vecteur de D est envoyé sur $\vec{0}$: $V_0 = D$, de dimension 1.

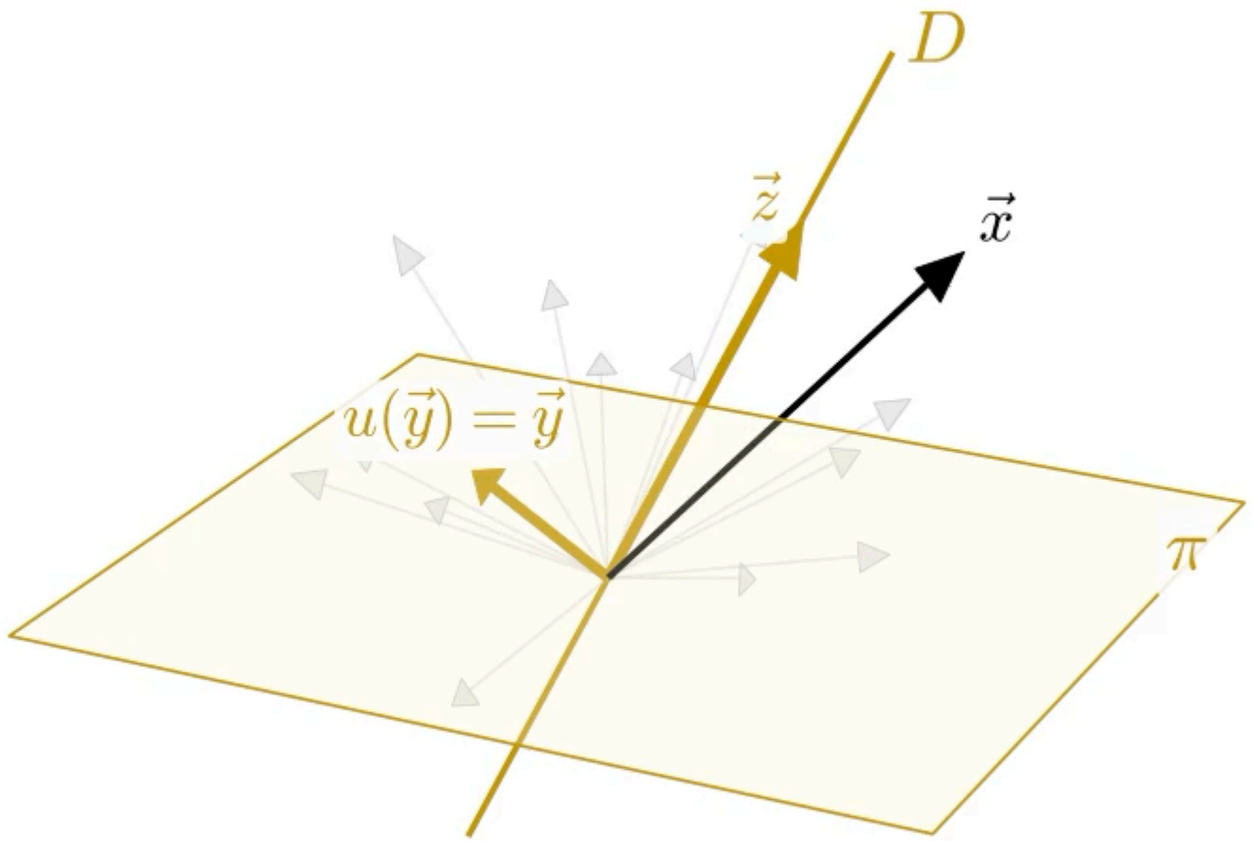
Dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\pi = \mathrm{Vect}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ et $D = \mathrm{Vect}\langle \vec{e}_3 \rangle$, la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La valeur propre 1 est double et $\dim V_1 = 2$; la valeur propre 0 est simple et $\dim V_0 = 1$.

Intuition : sous-espaces propres (animation)

Projection sur le plan π parallèlement à D : les vecteurs de π sont **conservés**, ceux de D sont envoyés sur $\vec{0}$.



Sous-espaces propres : $V_1 = \pi$ (dimension 2) et $V_0 = D$ (dimension 1).

4.3.1 Définition du sous-espace propre

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

4.3.1 Définition du sous-espace propre

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

Proposition 4.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A et si on note V_λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AY = \lambda Y\},$$

alors V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4.3.1 Définition du sous-espace propre

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

Proposition 4.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A et si on note V_λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AY = \lambda Y\},$$

alors V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve. (au tableau).

4.3.1 Définition du sous-espace propre

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

Proposition 4.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A et si on note V_λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AY = \lambda Y\},$$

alors V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve. (au tableau).

Définition 4.3.1

Si λ est une valeur propre de A, on appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, noté V_λ, défini par :

$$V_\lambda = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AY = \lambda Y\right\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I).$$

4.3.1 Définition du sous-espace propre

Le sous-espace propre V_λ contient les vecteurs propres (non nuls) associés à λ et le vecteur nul. λ est une valeur propre de A, donc $V_\lambda \neq \{0\}$, donc $\dim V_\lambda \geq 1$.

4.3.1 Définition du sous-espace propre

Le sous-espace propre V_λ contient les vecteurs propres (non nuls) associés à λ et le vecteur nul. λ est une valeur propre de A, donc $V_\lambda \neq \{0\}$, donc $\dim V_\lambda \geq 1$.
Si u est un endomorphisme de E, si λ est une valeur propre de u, on peut également définir le sous-espace propre associé à λ. On a alors un sous-espace vectoriel de E :

$$V_\lambda = \left\{\vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\right\}.$$

Exemple. Soit la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de l'Exercice A.1.5, alors on a

$$V_1 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{et} \quad V_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Détail des calculs. A_5 est triangulaire, donc $\Pi_{A_5}(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$: valeurs propres 1 (double) et 2 (simple).

- $\lambda = 1 : A_5 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$(A_5 - I)Y = 0 \iff y_3 = 0 \iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 2 : A_5 - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$(A_5 - 2I)Y = 0 \iff \begin{cases} y_1 = y_3 \\ y_2 = 0 \end{cases} \iff Y = y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somme directe des sous espaces propres

Proposition 4.3.2

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ et si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont p vecteurs propres associés, c'est-à-dire $AY_i = \lambda_i Y_i$ et $Y_i \neq 0$, alors la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre.

Proposition 4.3.2

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ et si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont p vecteurs propres associés, c'est-à-dire $AY_i = \lambda_i Y_i$ et $Y_i \neq 0$, alors la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur p.

- **Initialisation.** $p = 1$, il est évident que la famille (Y_1) est libre, puisque un vecteur propre est non nul par définition.
- **Hérédité.** On suppose que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$ est libre. On va démontrer par l'absurde que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre. On suppose que $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est liée, alors, d'après le Chapitre 1, Y_p est combinaison linéaire de $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$,

$$Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i.$$

Preuve (suite).

- **Calcul.** On multiplie par la matrice A, puis on remarque que les vecteurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont des vecteurs propres :

$$AY_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i AY_i \iff \lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \lambda_i Y_i \iff \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_p) Y_i = 0.$$

- **Liberté de $(Y_1, \ldots, Y_{p-1})$.** Or, la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})$ est libre, donc

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p-1.$$

- **Contradiction.** Or, les valeurs propres sont toutes distinctes, donc $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p-1$. On a donc $Y_p = 0$, ce qui est impossible puisque Y_p est un vecteur propre.
- **Conclusion.** On vient de démontrer par l'absurde que la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ est libre. ■

Somme directe des sous espaces propres

Proposition 4.3.3

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, alors les sous-espaces vectoriels $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Proposition 4.3.3

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, alors les sous-espaces vectoriels $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Preuve. (Document C.1.1 du polycopié.)

▶ **Rappel.** Dans le Chapitre 1, on a vu la propriété caractéristique d'une somme directe :

$$H = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p \iff \forall \vec{y} \in H,\ \exists! \, \vec{y}_1 \in E_1, \ldots, \exists! \, \vec{y}_p \in E_p \mid \vec{y} = \vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_p.$$

▶ **Existence.** Posons $H = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_p}$. Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, on a : $\forall Y \in H, \exists Y_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, \exists Y_p \in V_{\lambda_p}$ tels que $Y = Y_1 + \ldots + Y_p$.

▶ **Unicité.** Il reste à démontrer l'unicité d'une telle décomposition. Supposons donc qu'il existe deux décompositions :

$$Y_1 + \ldots + Y_p = \hat{Y}_1 + \ldots + \hat{Y}_p \iff (Y_1 - \hat{Y}_1) + \ldots + (Y_p - \hat{Y}_p) = 0.$$

Or chacun des vecteurs $(Y_i - \hat{Y}_i)$ est un vecteur de V_{λ_i}, donc c'est le vecteur nul ou c'est un vecteur propre associé à λ_i. Si $Y_i \neq \hat{Y}_i$, on aurait donc une relation linéaire entre des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes, ce qui est impossible puisque l'on a montré (Proposition 4.3.2) qu'une telle famille était libre. ■

4.3.2 Pour aller plus loin : la dimension infinie

La démonstration de la Proposition 4.3.2 n'utilise que la linéarité : elle reste valable pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E quelconque, même de dimension infinie. Si $u(\vec{y}_i) = \lambda_i \vec{y}_i$ et $\vec{y}_i \neq \vec{0}$ ($i = 1, \ldots, p$), avec des λ_i deux à deux distincts, alors la famille $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p)$ est libre.

La démonstration de la Proposition 4.3.2 n'utilise que la linéarité : elle reste valable pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E quelconque, même de dimension infinie. Si $u(\vec{y}_i) = \lambda_i \vec{y}_i$ et $\vec{y}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, avec des λ_i deux à deux distincts, alors la famille $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p)$ est libre.

Exemple 1. Dans l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, la dérivation $d : f \mapsto f'$ est linéaire, et $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ vérifie $d(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$: c'est un vecteur propre de d associé à λ. Donc, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels distincts, les fonctions $t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \ldots, t \mapsto e^{\lambda_p t}$ sont linéairement indépendantes.

4.3.2 Pour aller plus loin : la dimension infinie

La démonstration de la Proposition 4.3.2 n'utilise que la linéarité : elle reste valable pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E quelconque, même de dimension infinie. Si $u(\vec{y}_i) = \lambda_i \vec{y}_i$ et $\vec{y}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, avec des λ_i deux à deux distincts, alors la famille $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p)$ est libre.

Exemple 1. Dans l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, la dérivation $d : f \mapsto f'$ est linéaire, et $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ vérifie $d(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$: c'est un vecteur propre de d associé à λ. Donc, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels distincts, les fonctions $t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \ldots, t \mapsto e^{\lambda_p t}$ sont linéairement indépendantes.

Exemple 2. Dans l'espace des suites réelles, le décalage $D : (u_0, u_1, u_2, \ldots) \mapsto (u_1, u_2, u_3, \ldots)$ est linéaire et la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $D\big((\lambda^n)_n\big) = \lambda\,(\lambda^n)_n$. Donc des suites géométriques de raisons distinctes sont linéairement indépendantes (utile pour les suites récurrentes, § 4.4.5).

Proposition 4.3.4

Si λ est une valeur propre de A, si V_λ est le sous-espace propre, si r est la multiplicité de λ et si d est la dimension de V_λ, alors

$$d \leq r.$$

Proposition 4.3.4

Si λ est une valeur propre de A, si V_λ est le sous-espace propre, si r est la multiplicité de λ et si d est la dimension de V_λ, alors

$$d \leq r.$$

Preuve. (Document C.1.2 du polycopié.)

▶ **Étape 1 : une base adaptée.** Si la dimension de V_λ est d, il existe une base $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_d)$ de V_λ. On a bien sûr $AY_i = \lambda Y_i$. On complète la famille libre $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_d)$ de façon à obtenir une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ notée $\widehat{\mathcal{B}} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

▶ **Étape 2 : la matrice dans cette base.** On note u l'application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}$ définie par : $u(Y) = AY$. La matrice de u quand on choisit la base canonique est A, la matrice de u quand on choisit la base $\widehat{\mathcal{B}}$ est :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \lambda I_d & \widetilde{C} \\ 0 & \widehat{C} \end{pmatrix}.$$

En effet, $AY_i = \lambda Y_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq d$, on obtient ainsi les d premières colonnes de $\widehat{A}$; les matrices $\widetilde{C}$ et $\widehat{C}$ appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_{d,n-d}$ et $\mathcal{M}_{n-d,n-d}$.

Preuve (suite).

▶ **Étape 3 : le polynôme caractéristique.** A et $\widehat{A}$ sont semblables, elles ont donc le même polynôme caractéristique (on note ici s la variable, λ désignant la valeur propre étudiée) :

$$\Pi_A(s) = \det(\widehat{A} - sI_n) = (\lambda - s)^d \det(\widehat{C} - sI_{n-d})$$

(déterminant d'une matrice triangulaire par blocs). On en déduit donc que la multiplicité de λ est supérieure ou égale à d. ■

Preuve (suite).

▶ **Étape 3 : le polynôme caractéristique.** A et $\widehat{A}$ sont semblables, elles ont donc le même polynôme caractéristique (on note ici s la variable, λ désignant la valeur propre étudiée) :

$$\Pi_A(s) = \det(\widehat{A} - sI_n) = (\lambda - s)^d \det(\widehat{C} - sI_{n-d})$$

(déterminant d'une matrice triangulaire par blocs). On en déduit donc que la multiplicité de λ est supérieure ou égale à d. ■

Vocabulaire. On appelle r la multiplicité algébrique de λ (multiplicité comme racine de Π_A) et $d = \dim V_\lambda$ sa multiplicité géométrique : on a toujours $1 \leq d \leq r$.

Exemple 1. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont les termes diagonaux. $\lambda = 1$ est donc valeur propre double et $r = 2$. Après calcul ($A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(A - I)Y = 0 \iff y_2 = 0$), on trouve $V_1 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, donc $\dim V_1 = d = 1$, on a donc $d < r$.

Exemple 1. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont les termes diagonaux. $\lambda = 1$ est donc valeur propre double et $r = 2$. Après calcul ($A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(A - I)Y = 0 \iff y_2 = 0$), on trouve $V_1 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, donc $\dim V_1 = d = 1$, on a donc $d < r$.

Exemple 2. La matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeur propre double $\lambda = 1$ donc $r = 2$. De plus $V_1 = \mathcal{M}_{2,1}$, car en effet $\forall Y \in \mathcal{M}_{2,1}$, $IY = Y$! Donc $\dim V_1 = d = 2$. Ici, on a donc $d = r$.

Proposition 4.3.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes appartenant à $\mathbb{K}$, si $d_1, \ldots, d_p$ sont les dimensions des sous-espaces propres $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$, alors

$$\sum_{i=1}^{p} d_i \leq n.$$

Proposition 4.3.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes appartenant à $\mathbb{K}$, si $d_1, \ldots, d_p$ sont les dimensions des sous-espaces propres $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$, alors

$$\sum_{i=1}^{p} d_i \leq n.$$

Preuve. (au tableau).

4.4

Réduction d'une matrice

4.4.1 Définition de la diagonalisation

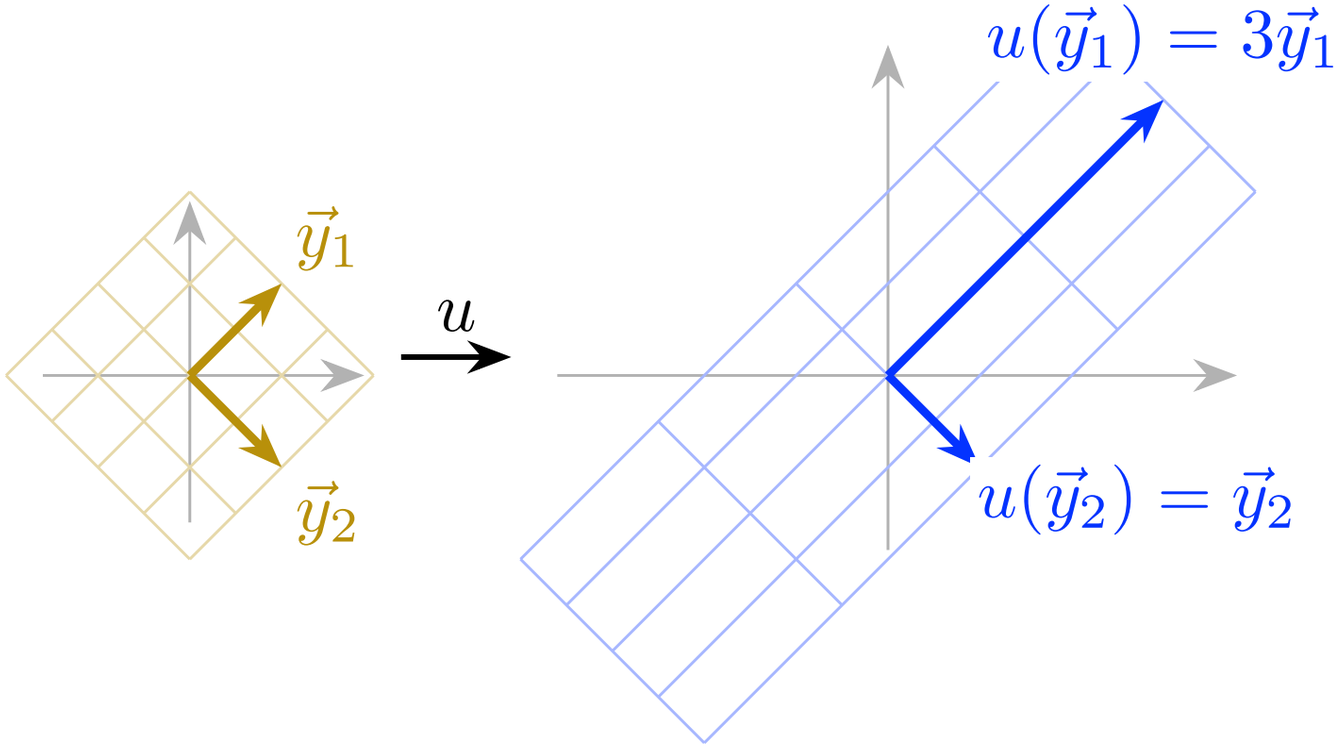
4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

4.4.5 Applications de la diagonalisation

Intuition : diagonaliser, c'est changer de base



Dans la base $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ de vecteurs propres, u étire le quadrillage d'un facteur 3 le long de $\vec{y}_1$ et le laisse inchangé le long de $\vec{y}_2$:

$$\vec{x} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$$
$$\Longrightarrow \quad u(\vec{x}) = 3c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2.$$

La matrice de u dans cette base est diagonale :

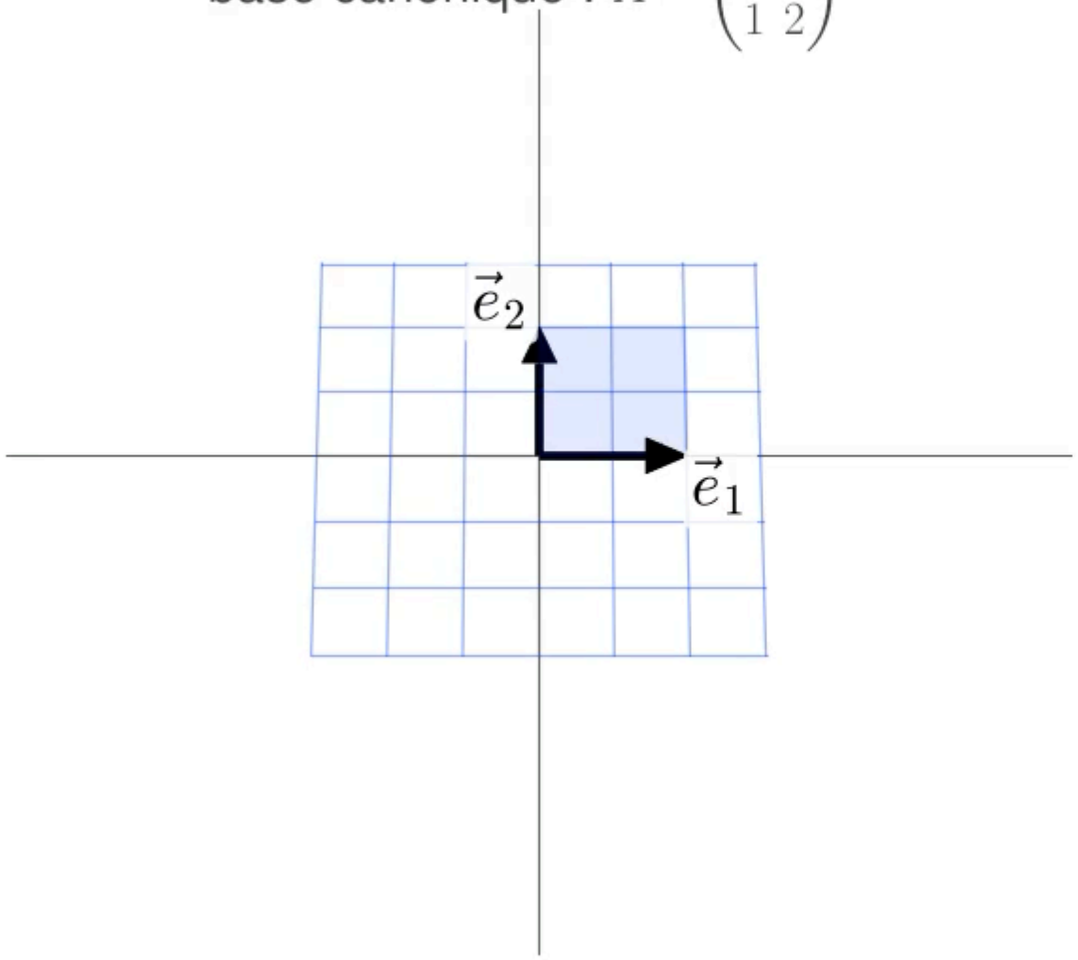
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (colonnes : } \vec{y}_1, \vec{y}_2).$$

C'est la diagonalisation (§ 4.4).

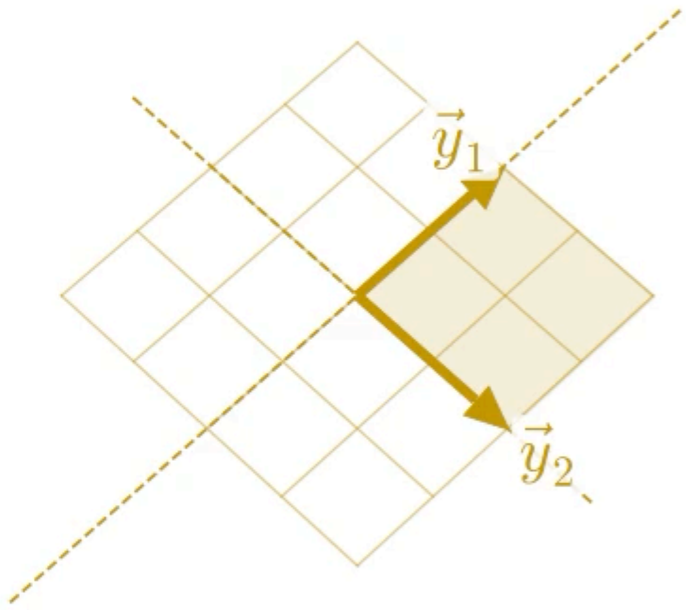
Intuition : diagonaliser, c'est changer de base (animation)

Diagonaliser, c'est choisir une **base de vecteurs propres** : dans la base $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, u agit coordonnée par coordonnée.

base canonique : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



base $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$: $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\vec{x} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 \implies u(\vec{x}) = 3c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (colonnes : $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$)

4.4.1 Définition de la diagonalisation

Définition 4.4.1

On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$ ou, ce qui est équivalent, $D = P^{-1}AP$.

Définition de la diagonalisation

Définition 4.4.1

On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$ ou, ce qui est équivalent, $D = P^{-1}AP$.

Les matrices A et D sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (Proposition 4.1.6) : ce sont les éléments de la diagonale de D (Proposition 4.1.3). Donc

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD.$$

Si on note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de P, on a

$$AP = PD \iff \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ AY_i = \mu_i Y_i.$$

Démontrer cette équivalence.

D'autre part

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD.$$

Si on note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de P, on a

$$AP = PD \iff \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ AY_i = \mu_i Y_i.$$

Démontrer cette équivalence.

Preuve. (au tableau).

D'autre part

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD.$$

Si on note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de P, on a

$$AP = PD \iff \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ AY_i = \mu_i Y_i.$$

Démontrer cette équivalence.

Preuve. (au tableau).

P est inversible, donc ses colonnes sont non nulles donc $Y_i \neq 0$. Donc les colonnes Y_i de P sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres μ_i.

D'autre part

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD.$$

Si on note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de P, on a

$$AP = PD \iff \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ AY_i = \mu_i Y_i.$$

Démontrer cette équivalence.

Preuve. (au tableau).

P est inversible, donc ses colonnes sont non nulles donc $Y_i \neq 0$. Donc les colonnes Y_i de P sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres μ_i.

Une matrice A diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$: il suffit de choisir $D = A$, $P = I$.

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 4.4.1

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AY_i = \mu_i Y_i$, $\mu_i \in \mathbb{K}$.

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 4.4.1

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AY_i = \mu_i Y_i$, $\mu_i \in \mathbb{K}$.

Preuve. (au tableau).

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 4.4.1

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AY_i = \mu_i Y_i$, $\mu_i \in \mathbb{K}$.

Preuve. (au tableau).

Théorème 4.4.2

$A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \ldots, p,\ d_i = r_i,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = n$$

(r_i est la multiplicité de λ_i, d_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i).

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 4.4.1

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AY_i = \mu_i Y_i$, $\mu_i \in \mathbb{K}$.

Preuve. (au tableau).

Théorème 4.4.2

$A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \ldots, p,\ d_i = r_i,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = n$$

(r_i est la multiplicité de λ_i, d_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i).

Remarque. On peut remarquer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ est toujours vérifiée (Proposition 4.2.1).

Preuve. (Document C.1.3 du polycopié.)

- **Étape 1 : reformulation.** Il est facile de montrer que :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} r_i = n \\ d_i = r_i, \ \forall i = 1, \dots, p \end{cases} \iff \sum_{i=1}^{p} d_i = n$$

$$\iff V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p} = \mathcal{M}_{n,1}.$$

(Car $d_i \leq r_i$ et $\sum r_i \leq n$ donnent $n = \sum d_i \leq \sum r_i \leq n$; et la somme directe $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$ est de dimension $\sum d_i$.)

Preuve (suite).

- **Étape 2 : somme directe et base de vecteurs propres.** On doit donc montrer maintenant que : $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p} \iff$ il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres de A. Le Théorème 4.4.1 permet ensuite de conclure que A est diagonalisable.
  - *Implication* : si $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$, l'union des bases de tous les sous-espaces propres est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres de A.
  - *Réciproque* : s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres $(Y_1, \ldots, Y_n)$, alors tout vecteur Y appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}$ est une combinaison linéaire des éléments de cette base et en regroupant la combinaison de vecteurs propres correspondant à une même valeur propre, il est facile de voir que $Y = Z_1 + \ldots + Z_p$ ($Z_i \in V_{\lambda_i}$), c'est-à-dire que $Y \in V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$. Donc on a $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$.

Exemple : une valeur propre double

Diagonalisons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$. On factorise Π_A par des opérations sur les colonnes puis sur les lignes (elles ne changent pas le déterminant) :

$$\Pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

Exemple : une valeur propre double

Diagonalisons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$. On factorise Π_A par des opérations sur les colonnes puis sur les lignes (elles ne changent pas le déterminant) :

$$\Pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 2$, simple ($r_1 = 1$), et $\lambda_2 = -1$, double ($r_2 = 2$).

Contrôle. $2 + (-1) + (-1) = 0 = \mathrm{Tr}(A)$ et $2 \times (-1) \times (-1) = 2 = \det(A)$.

Exemple : une valeur propre double (suite)

- $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I)Y = 0 \iff \begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} \iff y_1 = y_2 = y_3,$$

donc $V_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $d_1 = 1$.

- $\lambda_2 = -1$: $(A + I)Y = 0 \iff y_1 + y_2 + y_3 = 0$, donc

$V_{-1} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $d_2 = 2$.

Exemple : une valeur propre double (suite)

- $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I)Y = 0 \iff \begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} \iff y_1 = y_2 = y_3,$$

donc $V_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $d_1 = 1$.

- $\lambda_2 = -1$: $(A + I)Y = 0 \iff y_1 + y_2 + y_3 = 0$, donc

$V_{-1} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $d_2 = 2$.

On a $d_1 = r_1$ et $d_2 = r_2$ (ou encore $d_1 + d_2 = 3 = n$) : A est diagonalisable (Théorème 4.4.2), avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : une valeur propre double (suite)

Méthode.

(1) Calculer $\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ et ses racines ;

(2) pour chaque valeur propre λ_i, résoudre $(A - \lambda_i I)Y = 0$: base de V_{λ_i}, d'où d_i ;

(3) si $\sum d_i = n$, P a pour colonnes ces vecteurs propres et D les valeurs propres correspondantes.

4.4.2 Exemple : les symétries

Soit $S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I$ (par exemple la matrice d'une symétrie). Alors les valeurs propres de S sont dans $\{-1, 1\}$, et S est diagonalisable : $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 \oplus V_{-1}$, où $V_{\pm 1} = \mathrm{Ker}(S \mp I)$.

4.4.2 Exemple : les symétries

Soit $S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I$ (par exemple la matrice d'une symétrie). Alors les valeurs propres de S sont dans $\{-1, 1\}$, et S est diagonalisable : $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 \oplus V_{-1}$, où $V_{\pm 1} = \mathrm{Ker}(S \mp I)$.

Preuve.

- **Valeurs propres.** Si $SY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$, alors $Y = S^2 Y = \lambda^2 Y$, donc $\lambda^2 = 1$.
- $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 + V_{-1}$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$:

$$X = X_+ + X_- \quad \text{avec} \quad X_\pm = \tfrac{1}{2}(X \pm SX),$$
$$SX_\pm = \tfrac{1}{2}(SX \pm S^2 X) = \tfrac{1}{2}(SX \pm X) = \pm X_\pm.$$

Donc $X_+ \in V_1$ et $X_- \in V_{-1}$: $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 + V_{-1}$.

- **La somme est directe :** si $X \in V_1 \cap V_{-1}$, $X = SX = -X$, donc $X = 0$.
- **Conclusion.** Une base de V_1 réunie à une base de V_{-1} est donc une base de vecteurs propres de S : S est diagonalisable (Théorème 4.4.1). ■

4.4.2 Exemple : les symétries

Soit $S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I$ (par exemple la matrice d'une symétrie). Alors les valeurs propres de S sont dans $\{-1, 1\}$, et S est diagonalisable : $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 \oplus V_{-1}$, où $V_{\pm 1} = \mathrm{Ker}(S \mp I)$.

Preuve.

- **Valeurs propres.** Si $SY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$, alors $Y = S^2 Y = \lambda^2 Y$, donc $\lambda^2 = 1$.
- $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 + V_{-1}$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$:

$$X = X_+ + X_- \quad \text{avec} \quad X_\pm = \tfrac{1}{2}(X \pm SX),$$
$$SX_\pm = \tfrac{1}{2}(SX \pm S^2 X) = \tfrac{1}{2}(SX \pm X) = \pm X_\pm.$$

Donc $X_+ \in V_1$ et $X_- \in V_{-1}$: $\mathcal{M}_{n,1} = V_1 + V_{-1}$.

- **La somme est directe :** si $X \in V_1 \cap V_{-1}$, $X = SX = -X$, donc $X = 0$.
- **Conclusion.** Une base de V_1 réunie à une base de V_{-1} est donc une base de vecteurs propres de S : S est diagonalisable (Théorème 4.4.1). ■

Exemple. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (symétrie orthogonale par rapport à la droite $y_1 = y_2$) : $S^2 = I$, $V_1 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-1} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

Proposition 4.4.1

Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et si A admet n valeurs propres distinctes (donc simples) dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

Condition suffisante de diagonalisation

Proposition 4.4.1

Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et si A admet n valeurs propres distinctes (donc simples) dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

Preuve. (au tableau).

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

Proposition 4.4.1

Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et si A admet n valeurs propres distinctes (donc simples) dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

Preuve. (au tableau).

Cette condition suffisante n'est pas nécessaire. En effet, la matrice identité I_n a pour valeur propre 1, de multiplicité n, et pourtant I est diagonale (et donc diagonalisable !).

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

⚠ **Attention !** Une matrice peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si A est la matrice de la rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ dans le plan, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car elle n'a pas de valeurs propres réelles. En revanche, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet 2 valeurs propres complexes distinctes ($e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ car $\sin\theta \neq 0$).

4.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

⚠ **Attention !** Une matrice peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si A est la matrice de la rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ dans le plan, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car elle n'a pas de valeurs propres réelles. En revanche, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet 2 valeurs propres complexes distinctes ($e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ car $\sin\theta \neq 0$).

Exemple. La matrice A de la partie 1 a deux valeurs propres distinctes, 1 et 6 : elle est diagonalisable. Avec les vecteurs propres trouvés en partie 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure, elle admet une seule valeur propre $\lambda = 1$ qui est double : $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Si A était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice identité et on aurait $A = PIP^{-1} = I$! Ceci est faux, donc A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

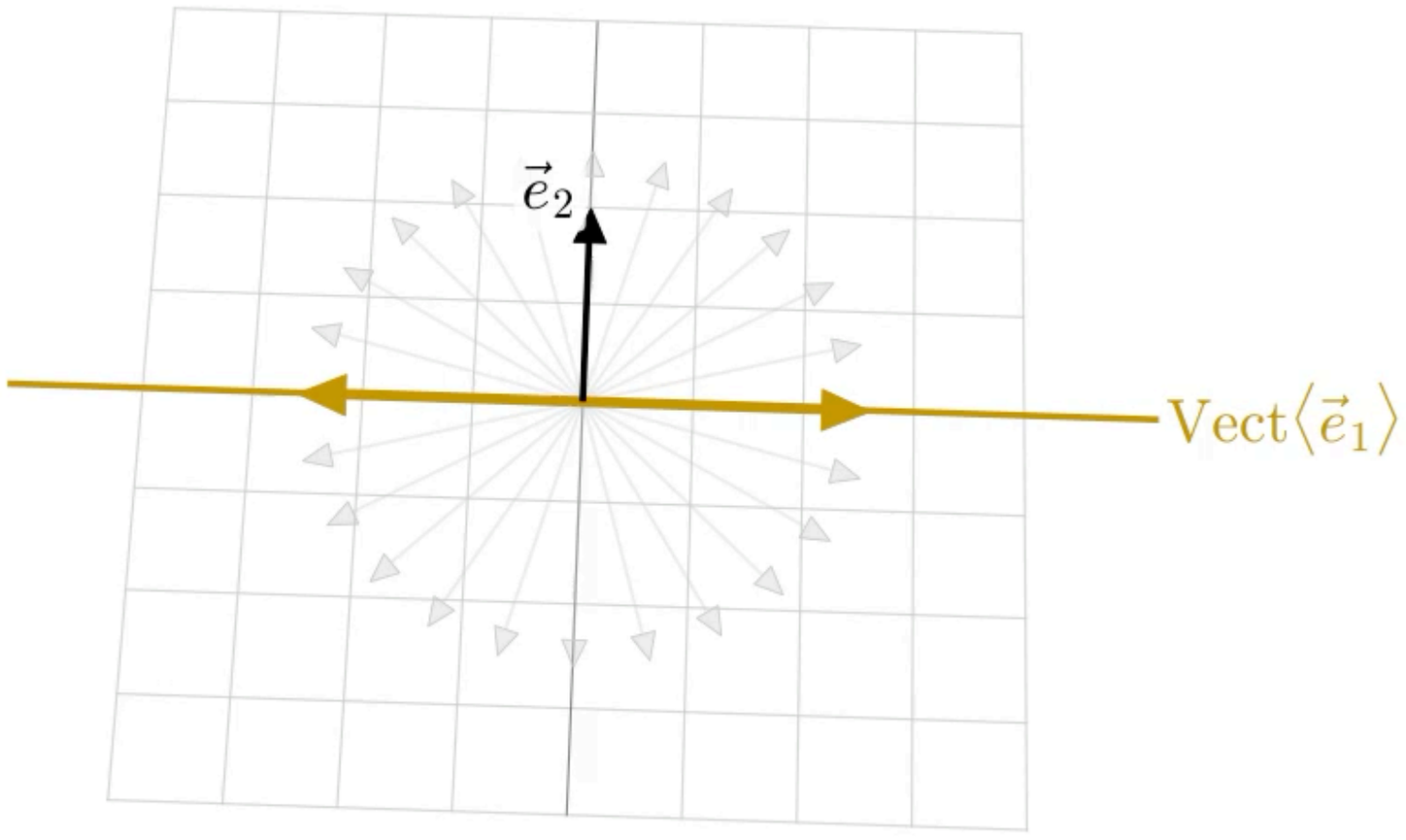
est triangulaire supérieure, elle admet une seule valeur propre $\lambda = 1$ qui est double : $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Si A était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice identité et on aurait $A = PIP^{-1} = I$! Ceci est faux, donc A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

> **Autre démonstration :** on a étudié cette matrice au paragraphe 4.3.3 et on a montré que $d = 1$ et $r = 2$ donc $d < r$. Donc la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation n'est pas vérifiée, donc la matrice A n'est pas diagonalisable !

Animation : une matrice non diagonalisable

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: une **seule direction conservée**, $\mathrm{Vect}\langle \vec{e}_1 \rangle$; impossible de former une base de vecteurs propres.



$\lambda = 1$ est double ($r = 2$) mais $V_1 = \mathrm{Vect}\langle \vec{e}_1 \rangle$ ($d = 1 < r$) : A n'est pas diagonalisable ; elle est déjà triangulaire (§ 4.4.4).

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème 4.4.3

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème 4.4.3

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

On peut citer un autre théorème en remplaçant triangulaire supérieure par triangulaire inférieure.

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème 4.4.3

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

On peut citer un autre théorème en remplaçant triangulaire supérieure par triangulaire inférieure.

La trigonalisation d'une matrice A, c'est-à-dire la recherche d'une matrice triangulaire semblable à A, nécessite la connaissance de toutes les valeurs propres de A, ce qui est coûteux numériquement. C'est donc une opération que l'on évite de faire effectivement. Mais, sur le plan mathématique, cela est très important, comme on le verra plus tard.

Preuve. (Document C.1.4 du polycopié.) On raisonne par récurrence sur la dimension n de la matrice A.

- **Initialisation.** Tout d'abord si $n = 1$, le théorème est évident et pour comprendre l'idée de la démonstration, nous allons établir le résultat pour $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ et $(\lambda, Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un couple propre de A (il existe, car Π_A a au moins une racine dans $\mathbb{C}$). Il existe donc un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que (Y, Z) forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Soit P la matrice dont les colonnes sont Y et Z (on a donc $P_1 = Y$, $P_2 = Z$) et soit $T = P^{-1}AP$, quelle est la première colonne de T ? On a

$$TI_1 = P^{-1}API_1 = P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y = \lambda P^{-1}P_1 = \lambda I_1,$$

donc T est de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$, ce qui démontre le résultat pour $n = 2$.

Preuve (suite).

▶ **Hérédité.** Supposons le résultat vrai pour toute matrice d'ordre $n-1$ et montrons-le pour $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Soit (λ, Y) un couple propre de A et soient $Q_2, \ldots, Q_n$ tels que $(Y, Q_2, \ldots, Q_n)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$; on note Q la matrice de ces colonnes ($Q_1 = Y$). Par le même raisonnement,

$$S = Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad \hat{S} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C}).$$

Preuve (suite). Par hypothèse de récurrence, il existe $\hat{P}$ régulière telle que $\hat{T} = \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}$ soit triangulaire supérieure. Avec $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{P} \end{array}\right)$:

$$T = P^{-1}SP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & t_{12} \ \dots \ t_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & t_{12} \ \dots \ t_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \hat{T} \\ 0 & \end{array}\right),$$

qui est bien triangulaire supérieure puisque $\hat{T}$ l'est. On a donc montré l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure telle que

$$T = P^{-1}SP = P^{-1}Q^{-1}AQP = (QP)^{-1}A(QP),$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.4.4 Complément : trigonalisation et valeurs propres

Si $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure, alors (Propositions 4.1.6 et 4.1.3)

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (t_{11} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda) \ :$$

les termes diagonaux de T sont les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de A, comptées avec leur multiplicité.

Si $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure, alors (Propositions 4.1.6 et 4.1.3)

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (t_{11} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda) \ :$$

les termes diagonaux de T sont les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de A, comptées avec leur multiplicité.

Plus généralement, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est semblable, dans $\mathbb{K}$, à une matrice triangulaire si et seulement si Π_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ (on dit que Π_A est scindé sur $\mathbb{K}$) ; la démonstration est celle du Document C.1.4 (admis ici).

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est toujours le cas (Théorème de d'Alembert) : on retrouve le Théorème 4.4.3.

Si $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure, alors (Propositions 4.1.6 et 4.1.3)

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (t_{11} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda) \ :$$

les termes diagonaux de T sont les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de A, comptées avec leur multiplicité.

Plus généralement, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est semblable, dans $\mathbb{K}$, à une matrice triangulaire si et seulement si Π_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ (on dit que Π_A est scindé sur $\mathbb{K}$) ; la démonstration est celle du Document C.1.4 (admis ici).

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est toujours le cas (Théorème de d'Alembert) : on retrouve le Théorème 4.4.3.

Application. Autre démonstration de la Proposition 4.2.2 : avec $T = P^{-1}AP$ triangulaire (dans $\mathbb{C}$),

$$\det(A) = \det(T) = \mu_1 \cdots \mu_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(T) = \mu_1 + \cdots + \mu_n,$$

car $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.

4.4.5 Applications de la diagonalisation

Parmi les applications de la réduction de matrices, on peut en citer deux :

Parmi les applications de la réduction de matrices, on peut en citer deux :

Calcul de la puissance d'une matrice. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors il existe une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On peut montrer facilement que

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D^k = \begin{pmatrix} \mu_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n^k \end{pmatrix}.$$

Parmi les applications de la réduction de matrices, on peut en citer deux :

Calcul de la puissance d'une matrice. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors il existe une matrice diagonale

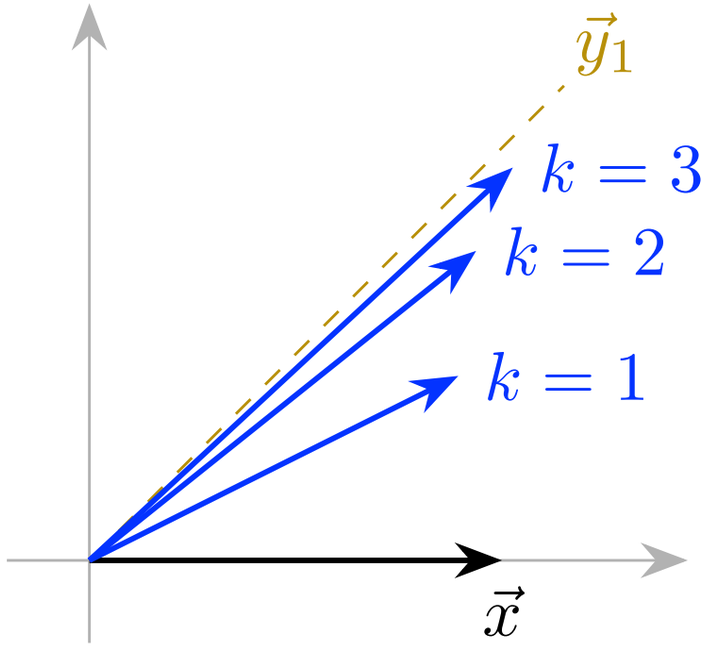
$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On peut montrer facilement que

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D^k = \begin{pmatrix} \mu_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n^k \end{pmatrix}.$$

Preuve. (au tableau).

Intuition : les puissances d'une matrice



directions de $u^k(\vec{x})$ (longueurs non à l'échelle)

Avec $\vec{x} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$:

$$u^k(\vec{x}) = 3^k c_1\,\vec{y}_1 + 1^k c_2\,\vec{y}_2.$$

La composante sur $\vec{y}_1$ (valeur propre de plus grand module) domine : la direction de $u^k(\vec{x})$ se rapproche de celle de $\vec{y}_1$.
Pour $\vec{x} = (1, 0)$: $u(\vec{x}) = (2, 1)$,
$u^2(\vec{x}) = (5, 4)$, $u^3(\vec{x}) = (14, 13)$.

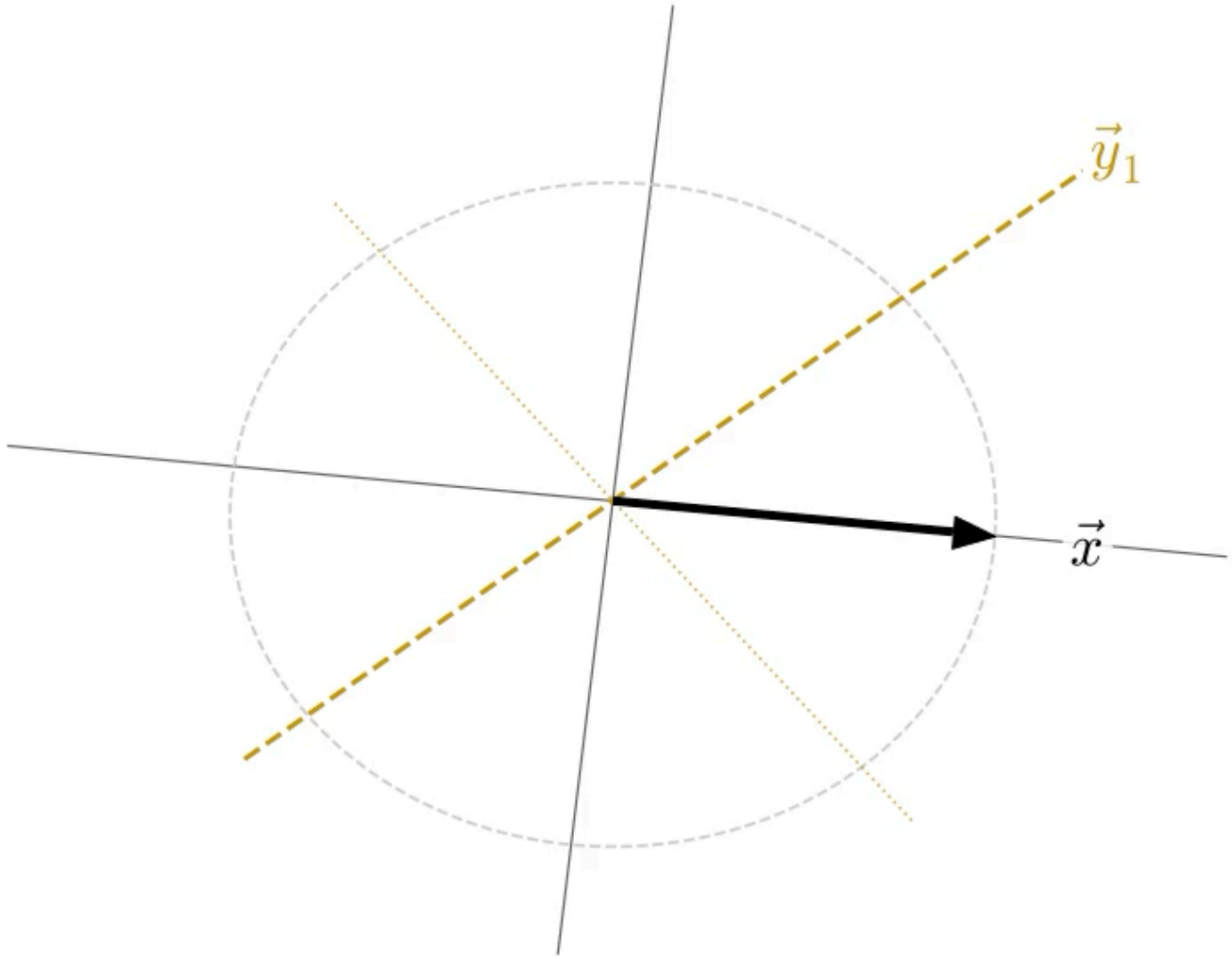
En pratique (§ 4.4.5), avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix},$$

donc $u^k(\vec{x}) = \left(\dfrac{3^k + 1}{2}, \dfrac{3^k - 1}{2}\right)$ (première colonne de A^k).

4.4.5 Intuition : les puissances d'une matrice (animation)

Puissances : la composante sur $\vec{y}_1$ (valeur propre de plus grand module) **domine** ; la direction de $u^k(\vec{x})$ se rapproche de celle de $\vec{y}_1$.



$k = 0 : \ \vec{x} = (1, 0)$

$$u^k(\vec{x}) = 3^k c_1 \vec{y}_1 + 1^k c_2 \vec{y}_2 = \left(\frac{3^k + 1}{2}, \frac{3^k - 1}{2}\right)$$

Résolution d'un système de suites linéaires récurrentes. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles définies par :

$$u_0, v_0 \text{ donnés, et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n, \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n. \end{cases}$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

la récurrence précédente s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$

(par récurrence : $X_{n+1} = AX_n = A\,A^n X_0 = A^{n+1}X_0$). Si A est diagonalisable, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

Complément : systèmes différentiels linéaires

On cherche les fonctions dérivables $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(0) = X_0 \text{ donné.}$$

Si $A = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, on pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$:

$$Z' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = DP^{-1}X = DZ, \quad \text{c'est-à-dire}$$
$$z_i'(t) = \mu_i\, z_i(t) \quad \Longrightarrow \quad z_i(t) = z_i(0)\, e^{\mu_i t}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Enfin $X(t) = PZ(t)$: dans la base de vecteurs propres, le système est « découplé ».

Complément : systèmes différentiels linéaires

On cherche les fonctions dérivables $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(0) = X_0 \text{ donné.}$$

Si $A = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, on pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$:

$$Z' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = DP^{-1}X = DZ, \quad \text{c'est-à-dire}$$
$$z_i'(t) = \mu_i\, z_i(t) \quad \Longrightarrow \quad z_i(t) = z_i(0)\, e^{\mu_i t}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Enfin $X(t) = PZ(t)$: dans la base de vecteurs propres, le système est « découplé ».

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (diapos d'intuition) : $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

donc

$$X(t) = c_1\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Complément : systèmes différentiels linéaires

On cherche les fonctions dérivables $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(0) = X_0 \text{ donné.}$$

Si $A = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, on pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$:

$$Z' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = DP^{-1}X = DZ, \quad \text{c'est-à-dire}$$
$$z_i'(t) = \mu_i\, z_i(t) \quad \Longrightarrow \quad z_i(t) = z_i(0)\, e^{\mu_i t}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Enfin $X(t) = PZ(t)$: dans la base de vecteurs propres, le système est « découplé ».

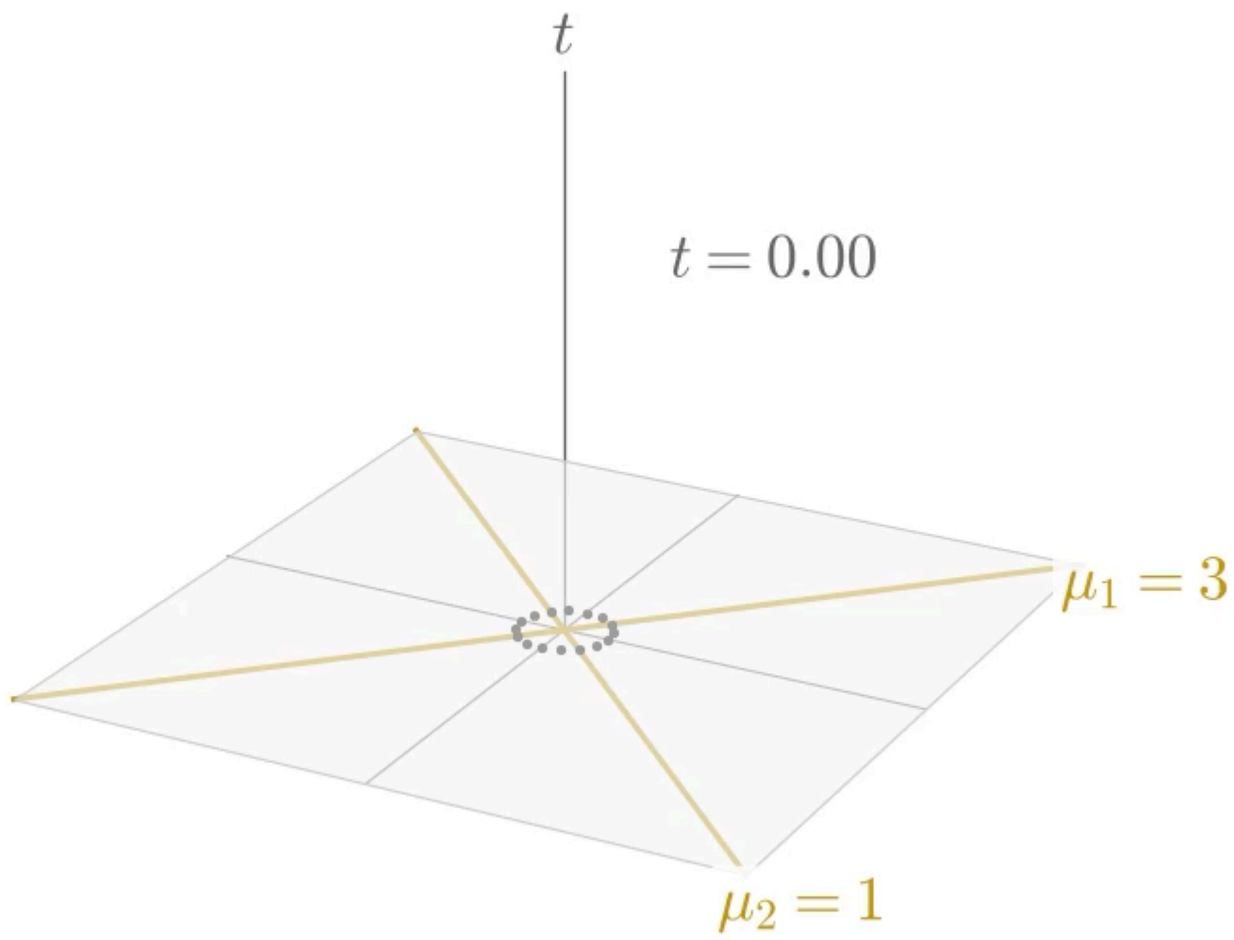
Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (diapos d'intuition) : $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc

$$X(t) = c_1\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Avec l'exponentielle de matrice (hors programme) : $X(t) = e^{tA}X_0$, où $e^{tA} = P\, e^{tD} P^{-1}$ et $e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{t\mu_1}, \dots, e^{t\mu_n})$.

Complément : systèmes différentiels (animation)

Système $X' = AX$: dans la base de vecteurs propres, il est **découplé** ; une solution issue d'une droite propre y reste.



$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad X(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (courbes : $t \mapsto (X(t), t)$; ombres : trajectoires dans le plan)

4.5

Compléments

4.5.1 Théorème de Cayley-Hamilton

4.5.2 Formes de Jordan

Théorème de Cayley-Hamilton

Préliminaire : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on peut définir ses puissances successives A^2, $A^3 \ldots$ Si π est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ donné par :

$$\pi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1} s + c_n,$$

on peut alors définir la matrice carrée

$$\pi(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_{n-1} A + c_n I_n.$$

La matrice $\pi(A)$ commute avec A, c'est-à-dire $A \times \pi(A) = \pi(A) \times A$. En effet, le produit matriciel est distributif par rapport à la somme et, de plus, A commute avec A^k, c'est-à-dire $AA^k = A^k A = A^{k+1}$.

Théorème 4.5.1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si Π_A est son polynôme caractéristique noté

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\big(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n\big),$$

alors

$$\Pi_A(A) = (-1)^n\big(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I_n\big) = 0.$$

Théorème 4.5.1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Si Π_A est son polynôme caractéristique noté

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\big(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n\big),$$

alors

$$\Pi_A(A) = (-1)^n\big(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I_n\big) = 0.$$

Remarque. Une des conséquences de ce théorème est que

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1}A - \alpha_n I$$

et donc, pour tout k tel que $k \geq n$, A^k peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I_n, A, …, A^{n-1}.

Preuve. On ne va pas donner la démonstration de ce théorème dans le cas général, mais seulement dans le cas particulier où A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$. On suppose donc qu'il existe une base $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

▶ **Étape 1 : réduction.** D'après l'Exercice A.1.18, une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est nulle si et seulement si $\forall i = 1, \ldots, n$, $BY_i = 0$. On applique ce résultat à la matrice $\Pi_A(A)$. On va donc montrer que pour $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I_n) Y_i = 0. \tag{4.5.1}$$

▶ **Étape 2 : puissances de A.** Comme (μ_i, Y_i) est un couple propre de A, on a pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$A^k Y_i = A^{k-1}(AY_i) = \mu_i A^{k-1} Y_i = \mu_i^2 A^{k-2} Y_i = \cdots = \mu_i^k Y_i.$$

Preuve (suite).

▶ **Étape 3 : conclusion.** On a donc :

$$\begin{aligned}
&(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I) Y_i \\
&\qquad = A^n Y_i + \alpha_1 A^{n-1} Y_i + \ldots + \alpha_{n-1} A Y_i + \alpha_n Y_i \\
&\qquad = \mu_i^n Y_i + \alpha_1 \mu_i^{n-1} Y_i + \ldots + \alpha_{n-1} \mu_i Y_i + \alpha_n Y_i \\
&\qquad = (\mu_i^n + \alpha_1 \mu_i^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \mu_i + \alpha_n) Y_i \\
&\qquad = (-1)^n \, \Pi_A(\mu_i) \, Y_i = 0 \, Y_i = 0.
\end{aligned}$$

En effet, μ_i est racine du polynôme caractéristique Π_A, donc $\Pi_A(\mu_i) = 0$. On vient donc d'établir la relation (4.5.1) et le théorème est démontré dans le cas particulier d'une matrice diagonalisable. ■

4.5.1 Complément : Cayley-Hamilton dans le cas général

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. D'après le Théorème 4.4.3, $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure de termes diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$, et

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (\mu_1 - \lambda) \cdots (\mu_n - \lambda).$$

4.5.1 Complément : Cayley-Hamilton dans le cas général

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. D'après le Théorème 4.4.3, $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure de termes diagonaux $\mu_1, \dots, \mu_n$, et

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (\mu_1 - \lambda) \cdots (\mu_n - \lambda).$$

Preuve.

▶ **Étape 1.** Notons I_k la k-ième colonne de I, $F_i = \mathrm{Vect}\langle I_1, \dots, I_i \rangle$ et $F_0 = \{0\}$. Comme T est triangulaire supérieure de diagonale $\mu_1, \dots, \mu_n$, la colonne i de $T - \mu_i I$ appartient à F_{i-1} et ses colonnes $j < i$ aussi : $(T - \mu_i I)F_i \subset F_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$.

▶ **Étape 2.** Donc

$$\begin{aligned}(T - \mu_1 I) \cdots (T - \mu_{n-1} I)(T - \mu_n I)\, \mathcal{M}_{n,1} &\subset (T - \mu_1 I) \cdots (T - \mu_{n-1} I)\, F_{n-1} \\ &\subset \cdots \subset (T - \mu_1 I)\, F_1 \subset F_0 = \{0\},\end{aligned}$$

d'où $\Pi_T(T) = (\mu_1 I - T) \cdots (\mu_n I - T) = 0$ (les facteurs commutent).

▶ **Étape 3.** Enfin $A^k = PT^kP^{-1}$ pour tout k, donc

$$\Pi_A(A) = P\,\Pi_A(T)\,P^{-1} = P\,\Pi_T(T)\,P^{-1} = 0.$$

4.5.1 Complément : Cayley-Hamilton dans le cas général

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. D'après le Théorème 4.4.3, $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure de termes diagonaux $\mu_1, \dots, \mu_n$, et

$$\Pi_A(\lambda) = \Pi_T(\lambda) = (\mu_1 - \lambda) \cdots (\mu_n - \lambda).$$

Preuve.

▶ **Étape 1.** Notons I_k la k-ième colonne de I, $F_i = \mathrm{Vect}\langle I_1, \dots, I_i \rangle$ et $F_0 = \{0\}$. Comme T est triangulaire supérieure de diagonale $\mu_1, \dots, \mu_n$, la colonne i de $T - \mu_i I$ appartient à F_{i-1} et ses colonnes $j < i$ aussi : $(T - \mu_i I)F_i \subset F_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$.

▶ **Étape 2.** Donc

$$\begin{aligned}(T - \mu_1 I) \cdots (T - \mu_{n-1} I)(T - \mu_n I)\, \mathcal{M}_{n,1} &\subset (T - \mu_1 I) \cdots (T - \mu_{n-1} I)\, F_{n-1} \\ &\subset \cdots \subset (T - \mu_1 I)\, F_1 \subset F_0 = \{0\},\end{aligned}$$

d'où $\Pi_T(T) = (\mu_1 I - T) \cdots (\mu_n I - T) = 0$ (les facteurs commutent).

▶ **Étape 3.** Enfin $A^k = PT^kP^{-1}$ pour tout k, donc

$$\Pi_A(A) = P\,\Pi_A(T)\,P^{-1} = P\,\Pi_T(T)\,P^{-1} = 0.$$

■

Pour une matrice réelle, on applique ce résultat en la considérant comme un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 2+2 \\ -2-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a bien :

$$\Pi_A(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le Théorème de Cayley-Hamilton permet aussi de calculer l'inverse d'une matrice. Dans l'exemple précédent,

$$A^2 - 4A + 5I = 0, \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{5}A(-A + 4I) = I,$$

(car $A(-A + 4I) = -A^2 + 4A = 5I$), ce qui donne

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(-A + 4I) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le Théorème de Cayley-Hamilton permet aussi de calculer l'inverse d'une matrice. Dans l'exemple précédent,

$$A^2 - 4A + 5I = 0, \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{5}A(-A + 4I) = I,$$

(car $A(-A + 4I) = -A^2 + 4A = 5I$), ce qui donne

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(-A + 4I) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérification. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = I.$

4.5.2 Formes de Jordan

On a démontré au paragraphe 4.4.4 que toute matrice carrée A était semblable à une matrice triangulaire. En fait, on peut même obtenir une forme triangulaire supérieure particulière appelée forme de Jordan de la matrice A.

Formes de Jordan

On a démontré au paragraphe 4.4.4 que toute matrice carrée A était semblable à une matrice triangulaire. En fait, on peut même obtenir une forme triangulaire supérieure particulière appelée forme de Jordan de la matrice A.

On appelle bloc de Jordan associé à la valeur propre λ de A, une matrice carrée J_λ de la forme :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Formes de Jordan

On a démontré au paragraphe 4.4.4 que toute matrice carrée A était semblable à une matrice triangulaire. En fait, on peut même obtenir une forme triangulaire supérieure particulière appelée forme de Jordan de la matrice A.

On appelle bloc de Jordan associé à la valeur propre λ de A, une matrice carrée J_λ de la forme :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice triangulaire supérieure J_λ a une taille qui dépend de la valeur propre λ de A. Cette matrice est telle que :

- tous ses éléments diagonaux sont égaux et valent λ,
- seule la première “sur-diagonale” est non-nulle et ses éléments valent 1.

Il est alors possible de montrer que A est semblable à une matrice J de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Formes de Jordan

Il est alors possible de montrer que A est semblable à une matrice J de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

La matrice J est donc une matrice “diagonale par blocs”.

- Les blocs de Jordan J_{λ_k} ont une taille que l’on peut déterminer théoriquement.
- Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ étant distinctes ou non (évidemment, si v_k est la taille de la matrice J_{λ_k}, on a $\sum_{k=1}^{m} v_k = n$). Cela veut dire qu’à une valeur propre on peut associer plusieurs blocs de Jordan de tailles diverses.
- Si la valeur λ est simple, alors le bloc de Jordan associé est réduit à une matrice 1×1 qui est donc la valeur propre elle-même !

Exemple de forme de Jordan. On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ sont distinctes.

$$A' = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & \\
\mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & & & & & & \\
 & & & & \lambda_2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & \\
 & & & & \mathbf{0} & \lambda_2 & \mathbf{1} & & & \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_2 & & & \\
 & & & & & & & \lambda_3 & \mathbf{1} & \\
 & & & & & & & \mathbf{0} & \lambda_3 & \\
 & & & & & & & & & \lambda_4 \\
 & & & & & & & & & & \lambda_4 \\
 & & & & & & & & & & & \lambda_5
\end{pmatrix}.$$

Pour plus de lisibilité, les termes nuls en dehors des blocs diagonaux de Jordan ne sont pas indiqués.

Formes de Jordan

Dans ce cas, on a

- $n = 14$: taille de la matrice A',
- $m = 7$: nombre de blocs de Jordan,
- A' a 5 valeurs propres distinctes : λ_1 de multiplicité 4, λ_2 de multiplicité 5 $(= 3 + 2)$, λ_3 double, λ_4 double, λ_5 simple.

Si A est semblable à A', alors $A = PA'P^{-1}$. A admet les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Dans ce cas, on a

- $n = 14$: taille de la matrice A',
- $m = 7$: nombre de blocs de Jordan,
- A' a 5 valeurs propres distinctes : λ_1 de multiplicité 4, λ_2 de multiplicité 5 $(= 3 + 2)$, λ_3 double, λ_4 double, λ_5 simple.

Si A est semblable à A', alors $A = PA'P^{-1}$. A admet les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

En utilisant les propriétés du produit matriciel, on peut montrer facilement que

- P_1, la première colonne de P, est vecteur propre de A associé à λ_1,
- P_5 et P_8 sont vecteurs propres de A associés à λ_2,
- P_{10} est vecteur propre de A associé à λ_3,
- P_{12} et P_{13} sont vecteurs propres de A associés à λ_4,
- P_{14} est vecteur propre de A associé à λ_5.

Dans ce cas, on a

- $n = 14$: taille de la matrice A',
- $m = 7$: nombre de blocs de Jordan,
- A' a 5 valeurs propres distinctes : λ_1 de multiplicité 4, λ_2 de multiplicité 5 $(= 3 + 2)$, λ_3 double, λ_4 double, λ_5 simple.

Si A est semblable à A', alors $A = PA'P^{-1}$. A admet les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

En utilisant les propriétés du produit matriciel, on peut montrer facilement que

- P_1, la première colonne de P, est vecteur propre de A associé à λ_1,
- P_5 et P_8 sont vecteurs propres de A associés à λ_2,
- P_{10} est vecteur propre de A associé à λ_3,
- P_{12} et P_{13} sont vecteurs propres de A associés à λ_4,
- P_{14} est vecteur propre de A associé à λ_5.

Détail. $AP = PA'$ et la 1re colonne de A' est $\lambda_1 I_1$, donc

$$AP_1 = API_1 = PA'I_1 = \lambda_1 PI_1 = \lambda_1 P_1 \ ;$$

de même pour les colonnes 5, 8, 10, 12, 13 et 14 de A', qui sont les premières colonnes des blocs de Jordan.

On peut en déduire que $d_1 \geq 1$, $d_2 \geq 2$, $d_3 \geq 1$, $d_4 \geq 2$, $d_5 \geq 1$. On peut montrer (et c'est admis ici) que la dimension de chacun des sous-espaces propres vaut $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$, $d_5 = 1$.

On peut en déduire que $d_1 \geq 1$, $d_2 \geq 2$, $d_3 \geq 1$, $d_4 \geq 2$, $d_5 \geq 1$. On peut montrer (et c'est admis ici) que la dimension de chacun des sous-espaces propres vaut $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$, $d_5 = 1$.

> **Remarque.** Sur cet exemple, d_k est le nombre de blocs de Jordan associés à λ_k et r_k est la somme de leurs tailles : $(d_k) = (1, 2, 1, 2, 1)$ et $(r_k) = (4, 5, 2, 2, 1)$. Ici $d_k < r_k$ pour $k = 1, 2, 3$: A n'est pas diagonalisable.

4.5.2 Complément : puissances d'une matrice non diagonalisable

Un bloc de Jordan de taille m s'écrit $J_\lambda = \lambda I + N$, où N (des 1 sur la sur-diagonale, des 0 ailleurs) est triangulaire supérieure stricte : $N^m = 0$, on dit que N est nilpotente. Comme λI et N commutent, la formule du binôme s'applique :

$$J_\lambda^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j, \qquad \text{où } N^j = 0 \text{ dès que } j \geq m.$$

4.5.2 Complément : puissances d'une matrice non diagonalisable

Un bloc de Jordan de taille m s'écrit $J_\lambda = \lambda I + N$, où N (des 1 sur la sur-diagonale, des 0 ailleurs) est triangulaire supérieure stricte : $N^m = 0$, on dit que N est nilpotente. Comme λI et N commutent, la formule du binôme s'applique :

$$J_\lambda^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j, \qquad \text{où } N^j = 0 \text{ dès que } j \geq m.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ (non diagonalisable, § 4.4.4), avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$:

$$A^k = I + kN = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5.2 Complément : puissances d'une matrice non diagonalisable

Un bloc de Jordan de taille m s'écrit $J_\lambda = \lambda I + N$, où N (des 1 sur la sur-diagonale, des 0 ailleurs) est triangulaire supérieure stricte : $N^m = 0$, on dit que N est nilpotente. Comme λI et N commutent, la formule du binôme s'applique :

$$J_\lambda^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j, \qquad \text{où } N^j = 0 \text{ dès que } j \geq m.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ (non diagonalisable, § 4.4.4), avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$:

$$A^k = I + kN = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Une matrice nilpotente n'a que 0 comme valeur propre (si $NY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$, alors $0 = N^m Y = \lambda^m Y$). Si elle est de plus diagonalisable, $N = P\,0\,P^{-1} = 0$: une matrice nilpotente non nulle n'est jamais diagonalisable.

TD Exercices de TD (Homeworks)

- Exercice A.2.1 : calcul de valeurs propres et vecteurs propres (page 71)
- Exercice A.2.2 : vp de matrice Compagnon (page 73)
- Exercice A.2.3 : vp de A + αI et de A^2 (page 74)
- Exercice A.2.4 : vp d'une matrice annulant le polynôme $X^2 + 1$ (page 75)
- Exercice A.2.5 : vp de AB et de BA, matrices de rang 1 (page 76)
- Exercice A.2.6 : diagonalisation, puissance de matrice, suite linéaire (page 78)
- Exercice A.2.7 : conditions de diagonalisabilité (page 80)
- Exercice A.2.8 : matrice diagonalisable avec une vp de multiplicité n (page 81)
- Exercice A.2.9 : vp de matrices qui commutent (page 82)
- Exercice A.2.10 : vp d'un bloc de Jordan (page 83)
- Exercice A.2.11 : trigonalisation d'une matrice, Cayley-Hamilton (page 84)